# A TREATISE

ON

# PLANE CO-ORDINATE GEOMETRY

AS APPLIED TO THE STRAIGHT LINE

AND THE

CONIC SECTIONS

WITH NUMEROUS EXAMPLES,

BY

I. TODHUNTER, M. A., F. R. S.

TRANSLATED INTO URDU,

BY

MUNSHI MAHAMMAD ZAKA-UL-LAH,

Head Master, Normal School, Delhi,

IN FURTHERANCE OF THE OBJECTS OF THE SCIENTIFIC SOCIETIES OF ALLYGURH AND SUBA BEHAR

# رسالہ اصول علم ھندسہ بالجبر

معہ بہت سي مثالوں کے

مولفہ

ٹاڈ ھنٹر صاحب ایم اِي ایف آر ایس

جسکو

منشي محمد ذکاءالله صاحب ھیڈ ماسٹر نارمل اِسکول دھلي نے

بتائید مقاصد

سین ٹیفک سوسئیٹي علیگڈہ و سین ٹیفک سوسئیٹي صوبہ بہار

أردو میں ترجمہ کیا

اور

بمقام دھلي مطبع مرتضوي میں باھتمام حاجي

محمد عزیزالدین کے مطبوع ھوا

سنہ ۱۸۷۱ ع

بسم اللہ الرحمن الرحیم

اس رسالہ مین جہانتک ممکن تہا یہہ کوشش کی گئی کہ مطالب اس طرح ادا ہون اور مضامین اسطرح
بیان ہون کہ مبتدیون کی سمجہہ مین بہی دقت آئین کہین ہاتہہ مین نہ پڑین اور پہر اسمین یہہ خوبی اور ہو
کہ جن مضامین کی ضرورت اکثر اونکو پڑتی ہی وہ سب اس رسالہ مین موجود ہون کوئی فروگذاشت ہو
علاوہ اون مسایل کے جو اکثر اس علم کی کتابون مین ہوتی ہین ایک ترکیب مختصر طریقہ کمابت کی
اخر باب مین جداگانہ لکہی ہی یہہ زمانہ حال کا ایجاد ہی ان ترکیبون کو اس علم کی اصول سی ایسا علاقہ
نہین جیساکہ اور مسائل کو ہی اسلئی ابتدا مین طالب علم اونکو چہوڑدین ہم نے اونکو کتاب سی گویا جدا ہی
لکہا ہی ہر باب کے اخر مین مثالین اسقدر لکہی ہین جسقدر کہ طالب علمون کی واسطی کافی ہوا کرتی ہین
اون سی وہ اصول کو خوب سمجہہ سکتی ہین ان مثالون کو نہایت احتیاط سی انتخاب کیا ہی اور مدت
کے امتحان اور تجربہ سی یہہ تحقیق ہوگیا ہی کہ یہہ مثالین طالب علمون کی نفع رسانی مین عدیم المثال ہین
اور کتاب کے آخر مین ماحصل ان مثالون کے لکہے ہین اور ایسی اشارہ ہی اور کتابہ لکہدئے ہین کہ وہ مثالونکی
ماحصل اور نتائج کے حاصل کرنے مین معین ہوتی ہین

خواص قریب البیضوی اور بیضوی اور بعید البیضوی کے جداگانہ بابون مین لکہی گئی ہین اور ان بابون کے
بعد بحث مساوات درجہ دوم کے خطوط منحنیہ پر کی گئی ہی — اسطرح بیان کرنے مین طالب علمون
کو بڑا فائدہ ہوتا ہی اور ترقی اونکی بخوبی ہوسکتی ہے فقط

# فہرست مضامین

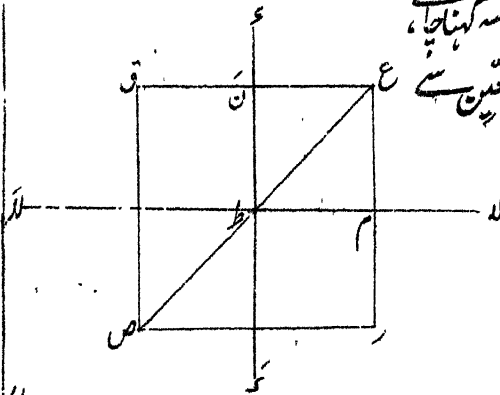
بسم اللہ الرحمن الرحیم

# ہندسہ بالجبر یا ہندسہ تحلیلیہ

## باب اول

### نقطہ کے معیّن اور محدّد

(۱) ایک فرع علم ریاضی کا نام ہندسہ بالجبر یا ہندسہ تحلیلیہ ہے اوسمین مسائل ہندسیہ کو جبر و مقابلہ سے ثابت کرتے ہین مگر درحقیقت یہہ فرع علم ریاضی کی وہ ہی جسمین خواص خطوط مستقیم کے اور خطوط منحنی کے جو ایک سطح مین واقع ہون بوساطت دو خطوط کے جنکا نام محدّد اور معیّن ہی تحقیق کئے جاتے ہین اسلئے اس فرع کو ان دو خطوط ہی کا ہندسہ کہنا چاہئے،

اب ہم یہہ لکھتے ہین کہ محدّد اور معیّن سے ہماری کیا مراد ہے

فرض کرو کہ سطح مستوی مین ایک نقطہ ط کا ہی اور وہ اپنی جگہہ سے ہلتا نہین اوسمین سے خطوط لا ط لاَ اور ء ط ءَ متقاطع علی القوائم گذرتے ہین اور سطح مستوی مین ع ایک اور نقطہ ہی اور ع م متوازی ط ء کا ء لا سے نقطہ م پر ملتا ہوا اور ع ن متوازی ءَ لا ط ء سے نقطہ ن پر ملتا ہو کھیچو — تو اب ظاہر ہی کہ ط م اور ط ن کے معلوم ہونے سے مقام نقطہ ع کا تحقیق ہو سکتا ہی اسواسطے کہ اگر م اور ن سے خطوط متوازی ط لا اور ط ء کے نکالین تو وہ نقطہ ع پر قطع کرینگے

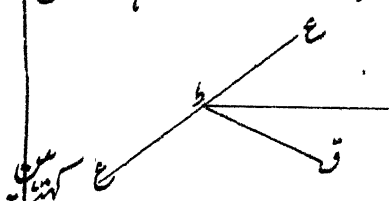
نقطہ ط کو مبدا کہتے ہین اور خطوط ط لا اور ط ی کو محور اور ط م کو محدّد نقطہ ع کا اور ط ن کو یا اوسکے مساوی ل ع م کو معیّن نقطہ ع کا کہتے ہین اور ط م اور م ع کو محدّدین نقطہ ع کے

(۲) فرض کرو کہ ط م = ا اور ط ن = ب تو ہم بموجب اپنی حدود کے یہہ کہینگے کہ نقطہ ع کا محدد برابر ہے ا کے اور معین نقطہ ع کا برابر ہے ب کے اور اختصاراً یون کہینگے کہ نقطہ ع کے محددین (ا اور ب) ہین

(۳) محور ط لا پر جو بعد اندازہ ہوتا ہے اوسکو اکثر لا کی رمز سی اور جو محور ط ی پر اندازہ ہوتا ہے اوسکو ی کی رمز سی تعبیر کرتے ہین پس ط لا کو محور لا کا اور ط ی کو محور ی کا کہتے ہین پس رموز لا اور ی کے مختلف عددی قیمتین مطابق مختلف نقاط کے ہم لگایا کرتے ہین اور اس مطلب کو کہ محددین نقطہ ع ا اور ب سطرح بیان کیا کرتے ہین کہ نقطہ ع کے واسطے لا = ا اور ی = ب

(۴) خطوط لا ط لا اور ی ط ی کے لا انتہا خارج ہونے سے سطح مستوی چار خانون مین تقسیم ہوتی ہی اسلئے ضروری ہی کہ کوئی بات ایسی مقرر کیجای کہ جسے یہہ تمیز ہوجاے کہ نقطے کس خانہ مین واقع ہین اسکے لئے وہی قاعدہ باتفاق جمہور مقرر ہوا ہے جو ہمنے علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع کے باب چہارم مین لکھا ہی - اگر ع ن کو ق تک ایسا خارج کرین کہ ن ق = ن ع تو نقطہ ق کے واسطے لا = -ا اور ی = ب اگر ع م کو ر تک ایسا خارج کرین کہ م ر = م ع تو نقطہ ر کے واسطے لا = ا اور ی = -ب اور اگر ع ط کو ص تک خارج کرین ایسا کہ ط ص = ط ع تو نقطہ ص کے واسطے لا = -ا اور ی = -ب

(۵) دفعہ اول کی شکل مین زاویہ ی ط لا قائمہ ہے تو محورون کو قائم الزاویہ کہتے ہین اور اگر زاویہ ی ط لا قائمہ نہو تو محورون کو منحرف یا غیر قائم الزاویہ کہتے ہین - جو کچھہ ابتک بیان ہوا ہے وہ قائم الزاویہ اور منحرف محور دونون سے متعلق ہے آگے سب جگہہ محورونکو قائم الزاویہ سمجھنا چاہئے اگر بالتصریح اوسکے خلاف نہ بیان ہوا ہو یہہ بات خواہ مسایل کی تحقیقات ہو یا امثال کا حل ہو دونون سمجھنی چاہئے

(۶) سطح مستوی مین نقطہ کا مقام قطبی محددین سے بہی تحقیق ہوسکتا ہی
فرض کرو کہ ایک قائم نقطہ ط ہی اور ایک خط قائم ط لا ہی اور ع ایک اور نقطہ ہی ملاؤ ط ع
تو مقام نقطہ ع کا متعین ہوجائیگا اگر ہمکو زاویہ
لا ط ع اور بعد ط ع معلوم ہون زاویہ کو اکثر ر سے
اور بعد کو ق سے تعبیر کرتے ہین ط کو قطب کہتے ہین
کہتے ہین اور ط لا کو خط ابتدائی اور ط ع کو نصف قطر دائر نقطہ ع کا اور ع ط لا کو زاویہ دائر

(۷) مقام کسی نقطہ کا فقط مثبت قطبی محددین ر اور ق سے بیان ہوسکتا ہی کیونکہ یہان کوئی
اشتباہ دفعہ ۳ کا سا نہین پیدا ہوسکتا کہ نقطہ چار خانون مین سے کس خانہ مین واقع ہی —
لیکن آسانی کے لئے یہان بہی جمہور نے اتفاق کرکے ایک قاعدہ دفعہ ۳ کا سا بنایا ہی کہ جو ط لا سے
ایک سمت مین زاوئیے اندازہ ہوتے ہین اونکو مثبت زاوئیے کہتے ہین اور جو دوسری سمت مین اندازہ ہوتے ہین اونکو منفی کہتے ہین پس اگر
شکل مین زاویہ ع ط لا مثبت خیال کیا جائے تو لا ط ق منفی زاویہ ہوگا اگر زاویہ لا ط ق ربع قائمہ
ہو تو یہہ ہم کہینگے کہ لا ط ق کے واسطے ر = $-\frac{\pi}{8}$ کچہہ یہہ ضرور نہین ہے کہ منفی زاوئیے داخل
ہی کئے جائین لیکن اوسمین آسانی ہے مثلاً مقام ط ق کا اسطرح سے بہی معین ہوسکتا تہا کہ ط لا
سے مثبت سمت مین زاویہ = $2\pi - \frac{\pi}{8}$ اندازہ کرتے اور منفی سمت مین زاویہ = $\frac{\pi}{8}$ کی نہ پیمائش کرتے
اور نصف قطر دائر کے بہی مثبت اور منفی قیمتین داخل کی گئی ہین اسطرح سی کہ فرض کرو محددین
نقطہ ع کے $\frac{\pi}{4}$ اور ۱ ہین یعنی فرض کرو کہ لا ط ع = $\frac{\pi}{4}$ اور ط ع = ۱ اور ع ط کو ع' تک
خارج کرو پس ط ع' = ط ع تو ع' اسطرح کہنے سے متعین ہوسکتا ہی کہ محددین $\frac{\pi}{4}$ اور $-1$ ہین
پس جب نصف قطر دائر منفی مقدار ہو تو ہم اوسکو اوسی خط پر اسطرح اندازہ کرتے ہین گویا وہ مثبت
مقدار تہی مگر ط سے مخالف سمت مین

اسے معلوم ہوا کہ اگر $\theta$ ایک زاویہ کو اور س کسی طول کو تعبیر کرے تو محددین $\theta$ اور −س سے
وہی نقطہ دریافت ہوگا جو قطبی محددین $\pi + \theta$ اور س سے معلوم ہوتا

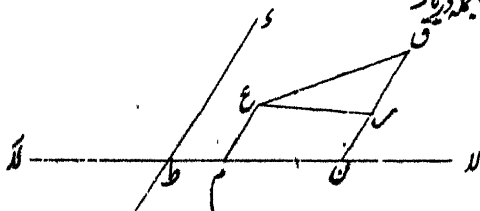
(۸) فرض کرو کہ لا اور ی محددین نقطہ ع کے ہین اور ط لا محور لا کا ہی اور نقطہ ط سے ط لا پر عمود نکالا گیا محور ی کو تعبیر کرتا ہی اور ر اور نق قطبی محددین نقطہ ع کے ہین اگر ہم نقطہ ع سے عمود ط لا پر نکالین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{لا} = \text{نق جم ر} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = \text{نق جب ر}$$

یہہ مساواتین ایک نقطہ کے قطبی اور قائم الزاویہ محددین کی تعلقات کو بتلاتی ہین اور انہی یا شکل سے ہم یہہ استنباط کرتے ہین

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{نق}^2 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ی}}{\text{لا}} = \text{مس ر}$$

(۹) اب ہم مقادیر ہندسیہ کے لیے جملے محددین کی ارقام مین دریافت کرتے ہین

جو دو نقطون کے درمیان خط واصل ہو اوسکے طول کے واسطے جملہ دریافت کرو



فرض کرو کہ ع اور ق دو نقطہ ہین اور د زاویہ میلان ط لا اور ی ط ی کا ہی ط ی کے متوازی ع م اور ق ن کہیچو اور فرض کرو کہ لا۱ اور ی۱ نقطہ ع کے اور لا۲ اور ی۲ نقطہ ق کے محددین ہین ع س متوازی ط لا کا کہیچو تو علم مثلث مستقیمۃ الاضلاع کے موافق

$$\text{ع ق}^2 = \text{ع س}^2 + \text{ق س}^2 - ۲\,\text{ع س ق س جم ع س ق}$$

$$\text{ع ق}^2 = \text{ع س}^2 + \text{ق س}^2 - ۲\,\text{ع س} \cdot \text{ق س جم د}$$

لیکن ع س = لا۲ − لا۱ اور ق س = ی۲ − ی۱ اسیواسطے

$$\text{ع ق}^2 = (\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)^2 + (\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱)^2 + ۲(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)(\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱)\,\text{جم د} \quad \ldots (۱)$$

پس اسطرح فاصلہ ع ق دریافت ہوگیا

اگر محور قائم الزاویہ ہین تو

$$\text{ع ق}^2 = (\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)^2 + (\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱)^2 \quad \ldots (۲)$$

اب طالب علم کو چاہئے کہ وہ نقاط ع اور ق کو مختلف خانوں میں اور مختلف مقاموں میں مقرر کرے تو وہ سب صورتوں میں مساوات (۱) (۲) کو صحیح اور درست پائیگا

مساوات (۲) سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ع ق}^2 = \text{لا}_1^2 + \text{کا}_1^2 + \text{لا}_2^2 + \text{کا}_2^2 - ۲\,(\text{لا}_1\,\text{لا}_2 - \text{کا}_1\,\text{کا}_2) \quad \ldots \quad (۳)$$

اب یہہ خاص صورتیں ہیں کہ نقطہ ع ہی مبدء ہو تو $\text{لا}_1 = ۰$ اور $\text{کا}_1 = ۰$ پس

$$\text{ع ق}^2 = \text{لا}_2^2 + \text{کا}_2^2$$

اگر نقطہ ع محور لا اور ق محور ی پر ہو تو $\text{کا}_1 = ۰$ اور $\text{لا}_2 = ۰$ پس

$$\text{ع ق}^2 = \text{لا}_1^2 + \text{کا}_2^2$$

فرض کرو کہ $\text{ر}_1$ اور $\text{نق}_1$ نقطہ ع کے اور $\text{ر}_2$ اور $\text{نق}_2$ نقطہ ق کے قطبی محددین ہوں تو

$$\text{لا}_1 = \text{نق}_1\ \text{جم}\ \text{ر}_1 \qquad \text{کا}_1 = \text{نق}_1\ \text{جم}\ \text{ر}_1$$

$$\text{لا}_2 = \text{نق}_2\ \text{جم}\ \text{ر}_2 \qquad \text{کا}_2 = \text{نق}_2\ \text{جم}\ \text{ر}_2$$

ان قیمتوں کو (۳) میں رکھو تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

$$\text{ع ق}^2 = \text{نق}_1^2 + \text{نق}_2^2 - ۲\ \text{نق}_1\ \text{نق}_2\ \text{جم}\,(\text{ر}_2 - \text{ر}_1)$$

یہہ نتیجہ اسطرح بھی حاصل ہو جاتا کہ ع اور ق اور مبدء میں خطوط وصل کرکے مثلث ع ط ق بناتے اور اوس سے مطلب نکال لیتے

(۱۰) دو نقاط معلوم میں ایک خط وصل کیا گیا ہی اور ایک نقطہ نسبت معلوم میں تقسیم ہوتا ہے تو اس نقطہ کی محددین کو دریافت کرو

فرض کرو کہ آ اور ب نقاط معلوم ہیں اور لا₁ اور ی₁ نقطہ ب کے اور لا₂ اور ی₂ نقطہ آ کے محددین ہیں اور نسبت معلوم ن₁ اور ن₂ کی نسبت ہی - فرض کرو کہ س نقطہ مطلوب ہے پس اس : س ب : : ن₁ : ن₂ اب بعین ا ل اور ب م اور س ن کہیچو اور اس متوازی ط لا کا س ن سے نقطہ د پر ملتا ہوا کہیچو اور فرض کرو کہ لا اور ی نقطہ س کے محددین ہیں تو شکل کے دیکھنے سے یہہ امر بدیہی ہے کہ

$$\frac{ل ن}{ن م} = \frac{ا د}{د س} = \frac{ا س}{س ب}$$

یعنی

$$\frac{لا - لا_1}{لا_2 - لا} = \frac{ن_1}{ن_2}$$

$$\therefore لا = \frac{ن_1 لا_2 + ن_2 لا_1}{ن_1 + ن_2}$$

اور اسیطرح

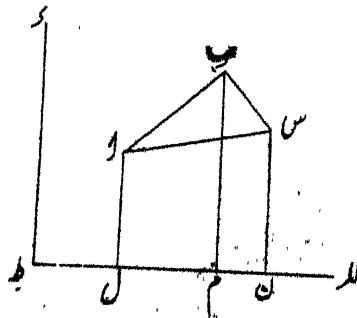
$$ی = \frac{ن_1 ی_2 + ن_2 ی_1}{ن_1 + ن_2}$$

اس دفعہ مین محور قائم الزاویہ اور محرف دونو ہو سکتی ہین

اسکی نہایت سہل صورت یہہ ہی کہ خط معلوم کی نقطہ وسط کے محددین دریافت کرین تو

$ن_1 = ن_2$ اور

$$لا = \frac{1}{2}(لا_1 + لا_2) \quad \text{اور} \quad ی = \frac{1}{2}(ی_1 + ی_2)$$

(۱۱) مثلث کے رقبہ کو اون نقطون کے محددین مین دریافت کرو جو اوس مثلث کے کونون پر واقع ہون

فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اور لا۱ اور ی۱ نقطہ ا کے اور لا۲ اور ی۲ نقطہ ب کے اور لا۳ ی۳ نقطہ س کے محددین ہین ۔ معین ا ل اور ب م اور س ن کہچو تو رقبہ مثلث ا ب س کا برابر ہی منحرف ا ب ل م + منحرف ب س ن م − منحرف ا س ن ل اور رقبہ منحرف ا ب م ل کا ½ ل م (ا ل + ب م)

یہہ ظاہر ہی اسلئے کہ اگر ب ل ملاوین تو منحرف دو مثلثون مین تقسیم ہوگا جنمین سے ایک کا قاعدہ ا ل اور دوسرے کا قاعدہ ب م ہوگا اور ارتفاع ہر یک مثلث کا ل م ہوگا

پس منحرف ا ب م ل = ½ (لا۲ − لا۱) (ی۱ + ی۲)

اور نیز منحرف ب س ن م = ½ (لا۳ − لا۲) (ی۲ + ی۳)

اور منحرف ا س ن ل = ½ (لا۳ − لا۱) (ی۱ + ی۳)

اسواسطے مثلث ا ب س

= ½ [(لا۲ − لا۱) (ی۱ + ی۲) + (لا۳ − لا۲) (ی۲ + ی۳) − (لا۳ − لا۱) (ی۱ + ی۳)]

یہہ جملہ قرینہ کے ساتہہ اسطرح لکہا جاسکتا ہے کہ

½ [(لا۲ − لا۱) (ی۲ + ی۱) + (لا۳ − لا۲) (ی۳ + ی۲) + (لا۱ − لا۳) (ی۱ + ی۳)] ۔

اگر اوسکا اختصار کرین تو ہمکو رقبہ مثلث کا یہہ حاصل ہوگا کہ

½ [(لا۲ ی۱ − لا۱ ی۲ + لا۳ ی۲ − لا۲ ی۳ + لا۱ ی۳ − لا۳ ی۱)] . . . . (۲)

اگر محور زاویہ د پر میلان رکہین تو رقبہ منحرف ا ب م ل = ½ ل م (ا ل + ب م) جب د اور علی ہذا القیاس اور منحرفون کا حال ہی ۔ پس رقبہ مثلث کا اوپر کے جملون کو جب د مین ضرب دینے سے حاصل ہو جائیگا

خواہ مقامات ا و ب و س کے بدل جائین مگر مساوات (۲) ہمیشہ مثلث کے رقبہ کے واسطے حاصل ہوگی یا ایسا جملہ حاصل ہوگا جسکی ہر رقم کی علامت بدلی ہوئی ہوگی ۔ اس سے معلوم ہوا کہ ہم رقبہ مثلث کا ہمیشہ ارقام جملہ (۲) کے قیمتون کے حساب لگانے سے دریافت کر سکتی ہین

اور علامتین حملہ کی بدل دین اگر نتیجہ منفی ہو

## مقام النقاط مساوات کا اور مساوات ایک خط منحنی کی

(۱۲) فرض کرو کہ ایک مساوات دو مقدار مجہول کی معلوم ہے مثلاً ی - لا - ۲ = ۰ تو اب ہم دیکھتے ہین کہ اس مساوات کے حل بیشمار ہین خواہ لا کی کچھہ ہی قیمت مقرر کرلین اور اوسکے مطابق قیمت ی کی دریافت کرین اگر لا کی قیمتین ۱ و ۲ و ۳ . . . وغیرہ مقرر کرین تو اوسکے مطابق قیمتین ی کی ۳ و ۴ و ۵ وغیرہ دریافت ہونگین — اب فرض کرو کہ ایک خط مستقیم یا منحنی ایسا ہے کہ وہ ہر نقطہ پر گذرتا ہی جو اسطرح دریافت ہوتا ہی کہ لا اور ی کے ایسی قیمتین مقرر کرین کہ جنسے شرائط مساوات ی - لا - ۲ = ۰ کی پوری ہون تو ایسی خط کو مقام النقاط مساوات کا کہتے ہین

ہم دوسرے باب مین ثابت کرینگے کہ مقام النقاط اس مساوات کا ایک خط مستقیم ہی اور ہم آگے دیکھینگے کہ عموماً ہر مساوات جنمین مقادیر لا اور ی مندرج ہون ایک مقام النقاط رکھتی ہین

لیکن ہم اپنی تحقیقات آیندہ اسطرح نہین شروع کرینگے کہ مساوات کا مقام النقاط دریافت کرین اور پہر معلوم کرین کہ وہ کس مقام النقاط کو تعبیر کرتی ہی بلکہ اسطرح سی تحقیقات کرینگے کہ اول حدود ہندسیہ خط منحنی کے بیان کرینگے اور اوس حدود سی مساوات جو مخصوص اوسے ہوگی دریافت کرینگے پہر مختلف خطوط منحنی ہم لینگے اور اونکے حدود ہندسیہ بیان کرینگے اور اوسی سے اونکی مساواتین استنباط کرینگے اور پہر ان مساواتونکے وساطت سے خواص خطوط منحنی کی دریافت کرینگے — دوسرے باب کا آغاز خط مستقیم کی مساوات سے ہوگا مقام النقاط اور مساوات مین جو تعلق اور ارتباط ہوتا ہی اوسی پر اس علم کی ساری بنا رکھی گئی ہی اسلئے اوسکو خوب غور سی سمجھنا چاہیے — اب ہم ایک حدود بیان کرتے ہین اور دوسرے باب مین اوسکا استعمال خط مستقیم پر کرینگے

**حد** خط منحنی کے ہر نقطہ کے محددین مین جو ارتباط مستحکم اور مستقل ہو اور وہ کبھی بدلتا نہ ہو تو جو مساوات اس ارتباط کو تعبیر کریگی اوسکو مساوات خط منحنی کی کہینگے اور خط منحنی جسکے ہر ایک نقطہ کے محددین شرایط مساوات کو پورا کرتے ہین اوس مساوات کا مقام النقاط کہینگے

(۳) غالباً طالب علم جبر مقابلہ کی مساوات کے درجہ اول اور دوم اور سوم وغیرہما سے واقف ہوگا۔ جب ہم کہتے ہین کہ مساوات ن درجہ کی درمیان دو مقادیر متغیرہ کی تو اوسکی یہہ معنی ہوتی ہین کہ ہر ایک رقم اوسکی لا لا کے شکل کی ہی جسمین ط اور د صفر ہین یا ایسی مثبت صحیح عدد ہین کہ ط + د برابر ن کے ہے ہر ایک رقم کے واسطے یہی کیفیت ہی کسی رقم مین وہ بہ نسبت ن کی بڑی نہین ہین اور ایسی مقدار ہی کہ عدد اوسکی واسطے ایک دفعہ تعین ہو چکا ہی اوسمین تغیر کبھی نہین ہوتی اور مساوات اسطرح بنتی ہے کہ ایسی رقمون سے ایک سلسلہ علامت + اور − سے متسلسل بنایا گیا ہی اور جو کچھہ حاصل ہوا ہی اوسکو = ۰ کے لکھا ہی اسیکا نام مساوات ہی

## امثلہ

(۱) قطبی مجددین اون نقطون کے دریافت کرو جنکی قائم الزاویہ مجددین بہ تفصیل ذیل ہین

(۱) لا = ۱ ی = ۱ (۲) لا = −۱ ی = ۲

(۳) لا = −۱ ی = ۱ ی = −۱ ی = −۱

اور نقطون کو شکل مین بتاؤ

(۲) قائم الزاویہ مجددین اون نقطون کے دریافت کرو جنکی قطبی مجددین بہ تفصیل ذیل ہین

(۱) ر = $\frac{\pi}{3}$ نق = ۳ (۲) ر = − $\frac{\pi}{3}$ نق = ۳

(۳) ر = $\frac{\pi}{3}$ نق = −۳ (۴) ر = − $\frac{\pi}{3}$ نق = −۳

اور نقطون کو شکل مین مقرر کرو

(۳) مجددین نقطہ ع کے −۱ اور ۴ ہین اور نقطہ ق کے ۳ اور ۲ تو طول ع ق کا دریافت کرو

(۴) سوال اول مین جو تین نقطے دریافت ہون اونمین جو خطوط وصل کرنے سے مثلث بنے اوسکا رقبہ دریافت کرو

(۵) ا ایک نقطہ محور لا پر ہے اور ب ایک نقطہ محور ی پر ہے نقطہ وسط ا ب کے مجددین کو ا اور ب کے مجددین کے ارقام مین بیان کرو اور یہہ بھی ثابت کرو کہ بعد اس نقطہ کا ا سے = $\frac{1}{2}$ ا ب

(۶) مساوات (۲) دفعہ ۱۱ کو تحویل ایسی صورت کی طرف کرو کہ جسمین رقبہ مثلث کا نقاط زاویہ کے قطبی محددین مین بیان ہوا در بلا واسطہ غیری نقط شکل سے یہہ نتیجہ حاصل کرو

(۷) آ اور بَ دو نقطے ہین اور ط مبدء ہی رقبہ مثلث ا ط ب کو ا اور ب کے محددین کے رقمون مین اور نیز ارقام قطبی محددین ا اور ب مین بھی بیان کرو

(۸) آ اور بَ اور سَ تین نقطے ہین جنکے محددین دفعہ ۱۱ مین بیان ہوئے ہین فرض کرو کہ اب کا نقطہ وسط د ہی ملاؤ س د اور اوسکو نقطہ ح پر ایسا تقسیم کرو کہ س ح = ۲ ح د تو نقطہ ح کی محددین دریافت کرو

(۹) مثال گذشتہ مین اگر نقطہ ح اور نقاط آ و بَ و سَ خطوط وصل کرکے تین مثلث ح ا ب اور ح ب س اور ح ا س بنائین تو ہر ایک مثلث انمین سے برابر ایک تہائی مثلث ا ب س کے ہوگا دیکھو دفعہ ۱۱

(۱۰) ا اور ب دو نقطے ہین اور محددین نقطہ ا کے $\text{ر}_1$ اور $\text{نق}_1$ اور ب کے $\text{ر}_2$ اور $\text{نق}_2$ ہین اور ایک خط مبدء ط سے زاویہ ا ط ب کی تنصیف کرتا ہوا کھنچا گیا ہی اگر س وہ نقطہ ہو جسپر یہہ خط ا ب سے ملتا ہے تو ثابت کرو کہ قطبی محددین نقطہ س کے یہہ ہین کہ

$$\text{ر} = \tfrac{1}{2}(\text{ر}_1 + \text{ر}_2) \quad \text{اور} \quad \text{نق} = 2\,\text{نق}_1\,\text{نق}_2\,\text{جم}\,\tfrac{1}{2}(\text{ر}_2 - \text{ر}_1)$$

(۱۱) مثال ۸ مین قیمت $\text{س د}^2$ اور $\text{ا د}^2$ کی اون محددین کی رقمون مین دریافت کرو جو وہان بیان ہوئی ہین اور ثابت کرو کہ

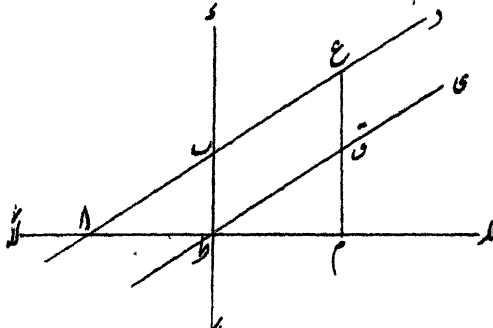
$$\text{ا س}^2 + \text{ب س}^2 = 2\,\text{س د}^2 + 2\,\text{ا د}^2$$

(۱۲) مثال ۹ مین قیمت $\text{ح ا}^2$ اور $\text{ح ب}^2$ اور $\text{ح س}^2$ کی اون محددین کے رقمون مین دریافت کرو جو وہان مستعمل ہوئی ہین اور ثابت کرو کہ

$$3(\text{ح ا}^2 + \text{ح ب}^2 + \text{ح س}^2) = \text{ا ب}^2 + \text{ب س}^2 + \text{س ا}^2$$

# باب دوم

## خط مستقیم

(۱۴) ایک خط مستقیم کی مساوات دریافت کرو

اول ہم یہہ فرض کرتے ہین کہ خط مستقیم کسی محور کا متوازی نہین ہے

فرض کرو کہ اب د ایک خط مستقیم ہے اور وہ محور ی سے نقطہ ب پر ملتا ہی۔ ایک خط طی نقطہ مبدء سے متوازی اب د کا کہیچو۔ اب د مین کوئی نقطہ ع کا مقرر کرو اور ع م متوازی طی کا طلا سے نقطہ م پر اور طی سے نقطہ ق پر ملتا ہوا کہیچو۔

فرض کرو کہ طب = س اور مماس ی ط لا = م اور محددین نقطہ ع کے لا اور ی تو

ی = ع م = ع ق + ق م

= ط ب + ق م

= س + ط م مماس ق ط م

= س + م لا

پس مساوات مطلوب یہہ ہے کہ ی = م لا + س

طب کو محور ی کا حصہ مبنی کہتے ہین۔ اگر محور ی کو سمت منفی مین خط قطع کرے تو س منفی ہوگا

زاویہ ق ط م یا ب ا ط کے مماس کو ہم نے م سے تعبیر کیا ہی یعنی اوس زاویہ کا مماس مقرر کیا ہے جو خط کا حصہ محور لا کے جانب بالا مین واقع ہوکر لا کی محور ممدودہ کے ساتہہ مثبت سمت مین بناتا ہی۔ اسے معلوم ہوا کہ خط جو مبدء مین سے ہوکر متوازی خط معلوم کا ہی درمیان ط ی اور ط لا کے واقع ہو تو م مماس زاویہ حادہ کا ہوگا اور مثبت ہوگا اور اگر درمیان ط ی اور

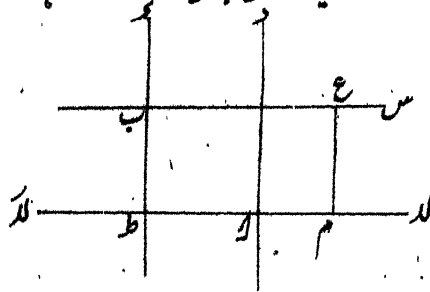
ط لا خارج سے دہ کے جانب جب مین واقع ہو تو م مماس زاویہ منفرجہ کا ہوگا اور منفی ہوگا ۔ جب تک ایک ہی خط مستقیم رہیگا م اور س نہین بدلینگے اسلئے اونکو مقادیر مستقل کہتے ہین کہ اونمین کبھی کچھہ تغیر نہین ہوتا ۔ لیکن لا اور ی کی بیشمار قیمتین ہو سکتی ہین کیونکہ جو چاہین قیمت لا کی مقرر کرین اوسکی مطابق قیمت ی کی مساوات ی = م لا + س سے دریافت ہو جائیگی اسواسطے لا اور ی کو مقادیر متغیر کہتے ہین یا فقط متغیر اسلئے کہ وہ ہمیشہ بدلتی رہتی ہین ایک حال پر نہین رہتی ہین اگر خط مبد ء مین گذرے تو س = ۰ کے ہوگا اور مساوات کی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

ی = م لا

(۱۵) اب ہم وہ صورتین بیان کرتے ہین جنمین خط متوازی کسی محور کا ہو

اگر خط متوازی محور لا کا ہو تو م = ۰ اور مساوات یہہ ہو جائیگی

ی = س

اگر خط متوازی محور ی کا ہو تو م مماس زاویہ قائمہ کا ہو جائیگا اور اسلئے لا انتہا ہوگا تو یہہ تحقیقات سابقہ کا یہان کچھہ کام نہ دیگا اسلئے اوسکے جداگانہ تحقیقات کرنی پڑی ۔ اب ہم ان دو صورتون کی جدا تحقیقات کرتے ہین مساوات ایک خط کی جو ایک محور کا متوازی ہو تحقیق کرو



اول فرض کرو کہ خط محور لا کا متوازی ہے اور خط ب س محور ی سے نقطہ ب پر ملتا ہی فرض کرو کہ ط ب = ص چونکہ خط محور لا کا متوازی ہے تو ع م معین اوسکے کسی نقطہ کا برابر ط ب کے ہے اسے معلوم ہوا کہ کسی نقطہ ع کے معین کا نام ی رکہا جائے تو مساوات خط کی یہہ حاصل ہوگی کہ

لا = ص

اب فرض کرو کہ محور ی کا خط متوازی ہی اور خط لا محور لا سے نقطہ ا پر ملتا ہی اور ط ا = ش

کہ خط متوازی محور د کا ہی اسلئے د اوسکے کسی نقطہ کا محدد ط ا ہی اسے معلوم ہوا کہ خط کے کسی نقطہ کے محدد کا نام لا رکہین تو یہہ مساوات خط کی حاصل ہوگی کہ

لا = ٹش

(۱۶) اب ہمنے ثابت کردیا کہ ہر خط مستقیم کی مساوات پہلے درجہ کی ہوتی ہی اب ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ہر مساوات درجہ اول کی جسمین دو مقادیر متغیر ہون ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

مساوات عام درجہ اول کی جسمین دو مقادیر متغیر ہون اس صورت کی ہوتی ہی

ا لا + ب د + س = ۰ . . . . . . (۱)

ا اور ب اور س مقادیر محدود یا صفر ہین

اول فرض کرو کہ ب صفر نہین ہے تو ب پر تقسیم کرنے سے مساوات (۱) سے یہہ حاصل ہوگا

د = − س/ب − ا/ب لا . . . . . (۲)

دفعہ ۱۴ مین ہم بیان کرچکے ہین کہ اگر ایک خط محور د سے ملتا ہوا مبدء سی س/ب کی فاصلہ پہ کہنچا جاے اور زاویہ محور لا سے ایسا بناے کہ جسکا ماس − ا/ب ہو تو (۲) مساوات اس خط کی ہوگی اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۲) اور اسلئے اصل مساوات (۱) ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے

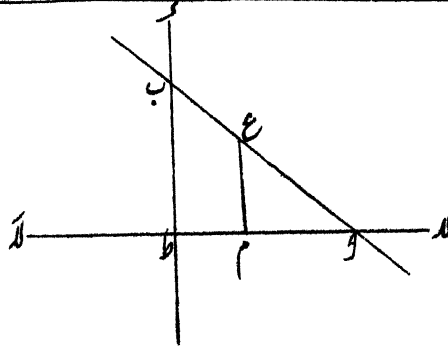
اگر ا = ۰ تو بموجب دفعہ ۱۵ کے خط (۱) سی تعبیر کیا گیا متوازی محور لا کے ہوگا

اگر ب = ۰ تو مساوات (۱) کی صورت یہہ ہو جائیگی

ا لا + س = ۰

یا لا = − س/ا

بموجب دفعہ ۱۵ کے ہمکو معلوم ہے کہ یہہ مساوات اوس خط کی ہی جو محور د کی متوازی ہو پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات ا لا + ب د + س = ۰ ہمیشہ ایک خط کو تعبیر کرتی ہے

(۱۷) مساوات حصص باہمی کی ارقام سین — ایک خط کی مساوات محوروں کی حصص باہمی کے ارقام مین بہی بیان ہوسکتے ہے

فرض کرو کہ نقاط ا اور ب پر محور لالا اور ی ی سے خط ملتا ہے اور طا = س اور طب = ص کے
فرض کرو اور ع کوئی نقطہ خط مین اور لالا اور ی ی اوسکے محددین مقرر کرو ع م متوازی ط ی کا کھینچو
تو مثلثون کے متشابہ ہونے سے $\frac{عم}{طب} = \frac{ام}{اط}$

یعنے $\frac{ی}{ص} = \frac{س - لا}{س}$

$\therefore \frac{لا}{س} + \frac{ی}{ص} = ۱$

(۱۸) طالب علم کے لئے یہہ مشق فائدہ مند ہی کہ وہ بعض معلوم مساواتون کے مطابق خطوط مرتسم کرین
مثلاً مساوات یہہ ہو ۲ ی + ۳ لا = ۷ تو اسکے مطابق خط مرتسم کرو چونکہ خط مستقیم اوسکے دو نقطون
کے معلوم ہونے سے دریافت ہو جاتا ہے اسلئے ہم جس طرح چاہین دو نقطے اوس خط کے دریافت
کرین پہر خط اونمین وصل ہوگا وہ وہی خط مطلوب ہوگا - فرض کرو کہ لا = ۱ تو مساوات
سے یہہ حاصل ہوگا کہ ی = ۲ اسے معلوم ہوا کہ نقطہ جسکا محدد = ۱ اور معین = ۲ ہی اوس
خط پر واقع ہی - پہر فرض کرو کہ لا = ۲ تو ی = $\frac{۱}{۲}$ تو نقطہ جسکا محدد = ۲ اور معین = $\frac{۱}{۲}$
ہی اوس خط پر واقع ہی پس جو نقطے اسطرح معلوم ہوئی ہین اونمین خط ملاؤ تو یہہ خط دونو
طرف غیر متناہی کھیچا گیا مقام النقاط مساوات معلوم کا ہوگا جن دو نقطون پر خط محورون کو کاٹتا ہے
وہ بہت آسانی سی دریافت ہو سکتے ہین فرض کرو کہ لا = ۰ مساوات معلوم مین تو ی = $\frac{۷}{۲}$
یعنی محور ی کے جس نقطہ پر خط گذرتا ہی اوسکا فاصلہ مبدء سے $\frac{۷}{۲}$ ہی پہر فرض کرو کہ ی = ۰
تو لا = $\frac{۷}{۳}$ یعنی محور لا کے جس نقطہ پر خط گذرتا ہی اوسکا فاصلہ مبدء سے $\frac{۷}{۳}$ ہے

اسطرح جو دو نقطے معین ہوئے ہین اونکے درمیان خط مستقیم وصل کرکے دونو طرف لانہایت بڑہائین وہ مساوات معلوم کا مقام انتقاط ہوگا محورون اور خط کے نقاط تقاطع جس طرح ہم نے تحقیق کئے تہے اوسے سوا اسطرح بہی مساوات سے فوراً تحقیق ہوجاتے ہین کہ مساوات کو اس صورت سے لکہین

$$\frac{۳لا}{۴} + \frac{۲ی}{۴} = ۱$$

اب پہر اوسکو اس مساوات دفعہ ۱۷ اسے مقابلہ کرین

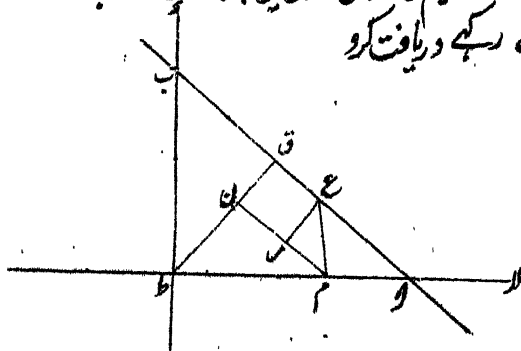
$$\frac{لا}{س} + \frac{ی}{ص} = ۱$$

توہمکو معلوم ہوگا کہ $س = \frac{۴}{۳}$ اور $ص = \frac{۴}{۲}$

پہر فرض کرو کہ ی = لا کے مساوات مفروضہ ہے چونکہ مساوات کے شرائط لا = ۰ اور ی = ۰ کے فرض کرنے سے پوری ہوتی ہی اسے معلوم ہوا کہ خط جس مساوات کو تعبیر کرتا ہی مبدء مین گذرتا ہے اسلئے اب فقط ایک اور نقطہ کے دریافت کرنیکی ضرورت ہی فرضکرو کہ لا = ۱ تو ی = ۱ اسے دوسرا نقطہ معلوم ہوگیا اور اس سبب سے خط کہچ گیا۔ مساوات معلوم کا مقابلہ اگر دفعہ ۱۴ کی مساوات کی اس صورت سے کرین کہ ی = م لا تو خط نجاتیگا اس مساوات سے ہم جانتے ہین کہ وہ خط تعبیر ہوتا ہے کہ مبدء مین سے گذرتا ہی اور محور لا سے وہ زاویہ بناتا ہی جسکا مماس م ہی اسے معلوم ہوا کہ مساوات ی = لا اوس خط کو تعبیر کرتی ہی جو مبدء مین گذرتا ہی اور محور لا سے زاویہ ۴۵° کا بناتا ہی اور علی ہذا القیاس ی = - لا اوس خط کو تعبیر کرتا ہی جو محور لا سے اوس زاویہ پر میلان رکہتا ہی جسکا مماس - ا ہی یعنی ۱۳۵° کا زاویہ وہ خط محور کے ساتہہ بناتا ہی اسے معلوم ہوا کہ مساوات اوس خط کو تعبیر کرتی ہی جو نقطہ ط پر گذر کرتا ہی اور شکل دفعہ ۱۴ مین خطوط ط ی اور ط لا جو جانب مین بڑہائی جائین تو اونکی درمیانی زاویہ کی یہہ خط تنصیف کرتا ہی

(۱۹) طالب علم پر لازم ہی کہ دفعات بالا کے مضامین کو خوب سمجھ بوجھ لے پہر آگے بڑہے جبر مقابلہ مین جو مساوات غیر المعین کے مسائل لکہے گئے ہین اکثر اونپر طالب علمونکی توجہ کم ہوتی ہی اسلئے جب طالب علم کسی مضمون کو وہان سے شروع کرتا ہے جہان اوسکو کام ایک ایسی مساوات سے پڑتا ہی کہ جسمین دو مجہول ہوتے ہین اور اکثر اونکے حل لا انتہا ہوتی ہین تو اوسکی طبیعت بعض

اوقات بڑی الجھتی ہی ابتک جو کچھہ ہم نے لکھا ہی اوسکا نتیجہ اعظم یہہ ہے کہ خط مستقیم مساوات درجہ اول سی تعبیر ہوتا ہی طالب علم کو ایسی عادت کر لینی چاہیے کہ جب مساوات اوسکے سامنے آئی تو اوسے ایک خط مستقیم سمجہہ جای خط مستقیم مساوات سی اسطرح دریافت ہوتا ہے کہ اول دو نقطے جنمین خط گذرتا ہی ایسی دریافت کرتی ہین جنمین سے ہر ایک کے محددین شرائط مساوات معلوم کو پورا کرتی ہین پس خط جو اسطرح معین ہو جاتا ہے اوسکے ہر نقطہ کے محددین مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہین

(۲۰) مساوات خط مستقیم کی عمود کی رقمون مین جو مبدء سے نکالا جاے اور اوس میلان کی رقمون مین جو یہہ عمود محور سے رکھے دریافت کرو

فرض کرو کہ ط ق عمود ط کی مبدء سے خط ا ب پر نکالا جاے۔ کوئی نقطہ ع خط مین مقرر کر دو ع م عمود ط ا پر اور م ن عمود ط ق پر اور ع س عمود م ن پر نکالو۔ فرضکرو کہ ط ق = ع اور زاویہ ق ط ا = ہ اور لا اور ی محددین نقطہ ع کے تو

ط ق = ط ن + ن ق = ط ن + ع س

= ط م جم ق ط ا + ع م جب ع م س

= لا جم ہ + ی جب ہ

اسیواسطے مساوات خط کی یہہ ہے

لا جم ہ + ی جب ہ = ع

(۲۱) خط مستقیم کے مختلف صورتون کے مساوات کی تحقیقات جدا جدا دفعات ۱۴ و ۱۷ و ۱۹ مین ہو چکی ہے۔ ان صورتون مین سے ہر ایک صورت سے اور باقی صورتین مستنبط ہو سکتی ہین اگر اون استنباطات کو کام مین لائین جو مقادیر مستقل اسمین رکہتی ہین جس مقدار کو ہم نے دفعہ ۱۷ مین ب سے تعبیر کیا تہا یعنی ط ب کو اوسکو دفعہ ۱۹ مین ی سے تعبیر کیا ہے

∴ ص = س . . . . (۱)

دفعہ ۱۷ مین $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = مس ب ا ط = مس (ک − ب ا لا) = − مس ب ا لا

دفعہ ۱۴ مین ہم ماس ب ا لا کو م سے تعبیر کرتے ہین

∴ $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ = − م . . . . . (۲)

دفعہ ۲۰ مین ط ا جم ہ = ط ق اور ط ب جب ہ = ط ق یعنی

ع = س جم ہ = ص جب ہ . . . . (۳)

اسیواسطے مساوات (۲) اور (۳) سے م = − مم ہ . . . (۴)

اور اگر مساوات ا لا + ب ی + س = ۰

اوس خط کو تعبیر کری جسپر ہم بحث کر رہی ہین تو بموجب دفعہ ۱۶ کے

− $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ = م و − $\frac{\text{س}}{\text{ب}}$ = س = ص . . . . (۵)

∴ $\frac{\text{ا}}{\text{ب}}$ = مم ہ اور $\frac{\text{س}}{\text{ب}}$ = − $\frac{\text{ع}}{\text{جب ہ}}$ . . . . (۶)

ان ارتباطات کی جہت سے ہم دفعات ۱۴ و ۱۷ و ۲۰ سے مساواتون کی تطبیق ثابت کر سکتے ہین

اور اونمین ایک سے باقی کو مستنبط کر سکتے ہین

(۲۲) مساواتونکی تحقیقات مین طالب علم کو چاہیئے کہ شکلین طرح طرح سے بدلکر ترسیم کری مثلاً

دفعہ ۱۷ مین شکل کے اندر فرض کرو کہ نقطہ ع خارج شدہ ب آ مین

محور لا کے نیچے واقع ہو تو بہی ہمکو یہہ حاصل ہی کہ $\frac{\text{ع م}}{\text{ط ب}}$ = $\frac{\text{ا م}}{\text{ا ط}}$ یا $\frac{\text{ع م}}{\text{ص}}$ = $\frac{\text{لا} - \text{س}}{\text{س}}$

اب چونکہ نقطہ ع محور لا کے نیچے واقع ہی اوسکا معین ی مقدار منفی ہی اسسے معلوم ہوا کہ ع م = ی

کے نہین رکہنا چاہیئے بلکہ ع م = − ی کے مندرج کرنا لازم ہے − چونکہ ب م سے ہماری مراد ایک

خاص طول سے ہوتی ہے جو مثبت لیا جاے پس

− $\frac{\text{ی}}{\text{ص}}$ = $\frac{\text{لا} - \text{س}}{\text{س}}$

اور اسیواسطے موافق سابق کے $\frac{\text{لا}}{\text{س}}$ + $\frac{\text{ی}}{\text{ص}}$ = ا کے حاصل ہوگا

## محددین محرف

(۲۳) مساوات خط مستقیم کی

ہم محوروں کے زاویہ بیں کو د سے تعبیر کرینگے

اول فرض کرو کہ خط متوازی کسی ایک محور کا نہین ہے

فرض کرو کہ اب د ایک خط مستقیم محور ی سے نقطہ ب پر ملتا ہے ۔ طی مبدء سے متوازی اب د کا کھینچو اور کوئی نقطہ ع مقرر کرو اور ع م متوازی طی کا ط لا سے نقطہ م پر اور طی سے نقطہ ق پر ملتا ہوا کھینچو اور فرض کرو کہ ط ب = س اور زاویہ ق ط م = ہ

فرض کرو کہ لا ی محددین نقطہ ع کی ہین تو

ی = ع م = ع ق + ق م = ط ب + ق م

لیکن ق م / ط م = جب ہ / جب (د − ہ)

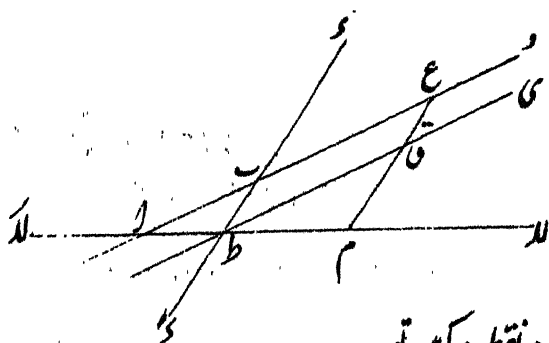
∴ ق م = لا جب ہ / جب (د − ہ)

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوب یہہ ہے کہ

ی = لا جب ہ / جب (د − ہ) + س

اگر ہم جب ہ / جب (د − ہ) کی جگہہ م رکھین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی = م لا + س

یہی دفعہ ۱۷ مین حاصل ہوا تھا

معنی س کے وہی ہین جو پہلے تہی — خط جو محور لا کے ساتہہ میل رکہتا ہے اوسکی جیب کو جو نسبت اوس میل کے جیب کے ساتہہ ہے جو خط محور ی سے رکہتا ہے اوسکو م تعبیر کرتا ہے — چونکہ جیب ہ ہمیشہ مثبت ہوگی اسلئے م کا مثبت یا منفی ہونا جب (د - ہ) کے مثبت یا منفی ہونے پر موقوف ہوا پس م مثبت ہوگا جب خط درمیان ط ی اور ط لا کے واقع ہو اور منفی ہوگا جب درمیان ط ی اور ط لاَ کے واقع ہو اور یہی صورت م کے پہلے بیان ہوئی ہے

یہان اور دفعہ ۱۴ مین معنی م کی ایک ہی ہوگئے اگر د = ط/۲ کیے کیونکہ م = مس ہ

(۲۴) چونکہ م = جب ہ / جب (د - ہ)

∴ م (جب د جم ہ - جم د جب ہ) = جب ہ

∴ م (جب د - جم د مس ہ) = مس ہ

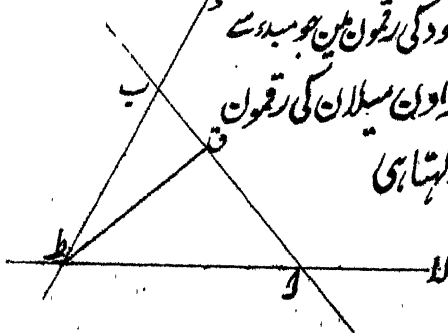
∴ مس ہ = م جب د / (۱ + م جم د)

اسسے معلوم ہوا کہ جب ہ = م جب د / ± √(۱ + ۲ م جم د + م۲)

جم ہ = (۱ + م جم د) / ± √(۱ + ۲ م جم د + م۲)

چونکہ جب ہ مثبت ہی اسلئے ہمکو اوپر کی علامت لینی چاہیئے جب م مثبت ہو اور نیچی کی علامت لینی چاہیے اگر م منفی ہو

(۲۵) دفعہ ۱۵ اور ۱۷ کی تحقیقات بغیر کسی تغیر و تبدل کے منحرف محوروں سے بہی متعلق ہو سکتی ہے اور تحقیقات دفعہ ۱۶ مین حاجت اسکی پڑتی ہی کہ مقدار مستقل م کی معنی مین کچہہ ضروری تبدل ہو

(۲۶) مساوات خط مستقیم کی اوس عمود کی رقمون مین جو مبدء سے خط پر نکالا جائے دریافت کرو اور اون میلان کی رقمون مین جو یہہ عمود محورون سے رکہتا ہی

ط ق عمود مبدء سے اب پر نکالو اور فرض کرو کہ ط ق = ع اور ط ا = س اور ط ب = ص اور اگر یہہ ہم فرض کرین کہ ق ط ا = ہ تو ق ط ب = د - ہ اور اسکو

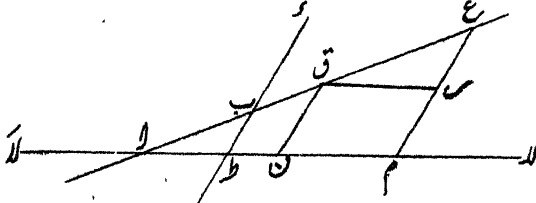
س سے ا تعبیر کرو تو ط ق = س جم ہ ∴ س = ع / جم ہ

ط ق = ص جم ک ∴ ص = ع / جم ک

ان قیمتونکو دفعہ ۷ اکی اس مساوات مین رکھو

لا / س + ی / ص = ۱

تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ لا جم ہ + ی جم ک = ع

(۲۷) مساوات خط مستقیم کی صورت ذیل بہت بکار آمد ہی

فرض کرو کہ ق نقطہ قائم کسی خط اب مین ہے اور ح اور ق او کے محددین ہین اور ع ایک اور نقطہ خط مستقیم مین ہے اور لا اور ی اوسکے محددین ہین اور ع ق = لو اور زاویہ ب ا لا = ہ

محددین ع م اور ق ن کہیچو اور ق ی متوازی ط لا کا نکالو تو

لا − ح / لو = جب (د − ہ) / جب د = ل کے فرض کرو

ی − ک / لو = جب ہ / جب د = ن کے فرض کرو

پس اسطرح لا − ح / ل = ی − ق / ن = نق

پس مساوات خط کے جگہ یہہ لکھنا کافی ہوگا کہ

لا − ح / ل = ی − ق / ن

لیکن یہہ یاد رکہنے کی بات ہی کہ ان مساواتون مین سے ہریک برابر نق کے ہے

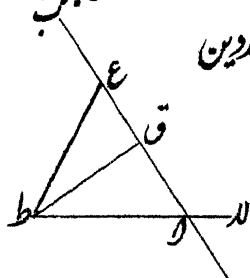
اگر محور قائم الزاویہ ہون تو ل برابر جم ہ کے اور ن برابر جب ہ کے ہوگا یعنی جیب التمام مین زاویون کی ہو جاینگی جنپر خط محور لا اور ی سے میل رکہتا ہے

اوپر کی شکل مین ع جانب جب مین ق کے واقع ہی تو لا − ح منفی ہوگا۔ چونکہ لا − ح = ل نق تو حاصل ضرب ل نق اپنی علامت بدلنے کے قابلیت رکہتا ہی اسسے ہمکو یہہ خیال پیدا ہوتا ہے

کہ ق مثبت اور منفی حسب حال ہوگا

پس جب ہم مساوات خط مستقیم کی اس صورت میں لکھتے ہیں کہ

$$\frac{لا - ح}{ل} = \frac{ی - ق}{ن}$$

اور ل اور ن کی قیمتیں معلوم جو اوپر بیان ہوئیں حساب میں لگاتی ہیں تو $\frac{لا - ح}{ل}$ اور $\frac{ی - ن}{ل}$ میں ہر یک تعداد کے اعتبار سے برابر نقطہ (ح اور ق) اور نقطہ (لا اور ی) کے فاصلہ درمیانی کے ہے لیکن علامت ہر جملہ کی موقوف دونو نقطوں کی مقامات اضافی پر ہوگی

(۲۸) قطبی مساوات ایک خط مستقیم کی قطبی محددین

فرض کرو کہ ا ب خط مستقیم ہے ط ق اوسپر عمود ہی اور مبدء سے مقام ابتدای ط لا ہے اور ع کوئی نقطہ خط مستقیم میں ہے

فرض کرو کہ ط ق = ع اور زاویہ ق ط لا = ہ اور نق اور ر قطبی محددین نقطہ ع کی ہین تو

$$ط ق = ط ع \text{ جم } ع ط ق$$

$$\text{یعنی } ع = نق \text{ جم } (ر - ہ)$$

یہہ قطبی مساوات خط کی ہے

(۲۹) قطبی مساوات اوس مساوات سی کہ قائم الزاویہ محددین میں ہو نکل سکتی ہے فرض کرو کہ

$$ا لا + ب ی + س = ۰$$

ایک خط مستقیم کی مساوات بلحاظ قائم الزاویہ محددین کے ہو۔ اوسمین بجای لا کے نق جم اور بجای ی کے نق جب ر بموجب دفعہ ۸ کے رکھہ لو تو

$$ا نق \text{ جم } ر + ب نق \text{ جب } ر + س = ۰ \quad \ldots\ldots (۱)$$

یہہ قطبی مساوات ہی اور یہہ مساوات اس مساوات سے کہ

ع = نق جم (ر − ہ) . . . . . . (۲)

بہی مطابق ہوسکتی ہے

اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۲۱ کے ہمکو حاصل ہے کہ

ا/ب = مم ہ اور س/ب = − ع/جب ہ

اس سبب سے مساوات (۱) کی یہہ صورت ہوگی کہ

مم ہ نق جم ر + نق جب ر − ع/جب ہ = ۰

یہہ (۲) کے ساتہہ مطابق ہے

(۳) مساوات جو مبدء پر گذرتا ہی موافق دفعہ ۱۴ کے یہہ ہے کہ

ی = م لا

بجای لا کے نق جم ر اور بجای ی کے نق جب ر لکہو تو مساوات یہہ ہوجا یگی کہ

نق جب ر = م نق جم ر

∴ مس ر = م

∴ ر = ایک مقدار مستقل کی

اسواسطے یہہ قطبی مساوات اوس خط کی ہے جو مبدء مین گذرتا ہے

اب ہم خط مستقیم کے مساوات کے مختلف صورتین جو اوپر ثابت ہوئین ہین یہان لکہدیتے ہین

ی = م لا + س دفعہ ۱۴ اور ۲۳

لا = مستقل یا ی = مستقل دفعہ ۱۵ اور ۲۵

لا/س + ص/لا − ۱ = ۰ دفعہ ۱۷ اور ۲۵

لا جم ہ + ی جب ہ − ع = ۰ دفعہ ۲۰ کے

ی = جب ہ/جب (د − ہ) لا + س دفعہ ۲۳ کے

لا جم ہ + ی جم کہ − ع = ۰ دفعہ ۲۶

(لا − ح)/ل = (ی − ق)/ن = ں دفعہ ۲۷

ع = نق جم (ر − ہ) دفعہ ۲۸

ا ق جم ر + ب ق جب ر + س = ۰ دفعہ ۲۹

ر = مستقل کے دفعہ ۳۰

## امثلہ

خطوط مستقیم کھینچو جو ذیل کی مساواتونکو تعبیر کرین

(۱) ی + ۲ لا = ۴ (۲) ۲ی − لا = ۲ (۳) لا + ی = −۲

(۴) لا − ۲ی = ۴ (۵) ی + ۲ لا = ۰ (۶) ا = جم (ر − ط/۴)

(۷) لا = ۱ (۸) ر = ط/۳ (۹) ر = ۰ (۱۰) ر = ۱

# باب سوم

## سوالات خط مستقیم کے

(۳۲) بعض سوالات پر کو دفعات مذکورہ بالا سے حل کرتے ہین

مساوات خط مستقیم کی جو ایک نقطہ معلوم پر گذرتا ہو دریافت کرو

فرض کرو کہ لا۱ اور ی۱ محددین نقطہ معلوم کے ہین اور فرض کرو کہ

ی = م لا + س . . . . (۱)

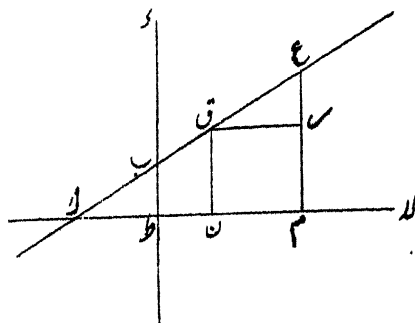
خط کو تعبیر کرتا ہی — چونکہ نقطہ (لا۱ اور ی۱) خط پر ہین تو اوسکی محددین مساوات (۱) کی شرائط کو پورا کرتی ہین اسے معلوم ہوا کہ

ی۱ = م لا۱ + س . . . . (۲)

تفریق کرنے سے ی − ی۱ = م (لا − لا۱) . . . . (۳)

یہہ مساوات مطلوب ہے

(۳۳) دفعہ بالا مین مساوات (۳) ہمارے مطلب کو تعبیر کرتی ہی یعنی ایک خط مستقیم کو جو ایک نقطہ معلوم (لا۱ و ی۱) پر گذرتا ہے — اسواسطے کہ مساوات درجہ اول کی ہے اور اوسمین لا اور ی متغیر ہین اسلئے بموجب دفعہ ۱۶ کے ضرور کسی نہ کسی ایک خط مستقیم کو

کو تعبیر کریگی اور ظاہر ہے مساوات کی شرائط ان قیمتون لا = لا۱ اور ی = ی۱ سے پوری ہوتی ہین یعنی خط جو مساوات سے تعبیر ہوتا ہے ضرور ایک خاص نقطہ پر گذرتا ہے۔ مقدار مستقل م مماس اوس زاویہ کا ہی جو خط کہ محور لا سے بناتا ہے پس م کی قیمت مناسب حال مقرر کرنے سے مساوات (۳) ہر خط مستقیم کی ہوجایگی جو نقطہ معینہ پر گذرتا ہے

مساوات (۳) کے معنی ہندسیہ ظاہر ہین اسواسطے کہ فرض کرو اب کوئی خط مستقیم ہو جو نقطہ معلوم ق پر گذرتا ہی اور ع اور کوئی نقطہ خط مین ہے اور اوسکے محددین لا اور ی ہین۔ معین ع م اور ق ن بناؤ اور ق س متوازی ط لا کے کھینچو تو

$$\frac{\text{ع س}}{\text{ق س}} = \text{مماس ع ق س}$$

یعنی $\frac{ی - ی_۱}{لا - لا_۱} = $ س ب ا لا = م

اور یہہ مساوات (۳) کے مطابق ہے

(۳۴) ہم نے دفعہ ۳۲ مین س کو مساوات (۱) اور (۲) کے درمیان سے ساقط کیا ہے اور م کو جہنے برقرار رکہا ہے اگر ہم چاہین تو م کو ساقط کرین اور س کو برقرار رکہین مساوات (۲) سے

$$م = \frac{ی_۱ - س}{لا_۱}$$

اسکو مساوات (۱) مین داخل کرو تو

$$ی = \frac{ی_۱ - س}{لا_۱} لا + س$$

$$\therefore ی لا_۱ - لا ی_۱ + س (لا - لا_۱) = ۰$$

یہہ مساوات ظاہراً ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہی جو نقطہ معلوم پر گذرتا ہی اسواسطے کہ وہ مساوات درجہ اول کی ہی اور قیمتون لا = لا۱ اور ی = ی۱ سے اوسکی شرائط پوری ہوتی ہین

(۳۵) مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو دو نقاط معلوم مین گذرتا ہے

فرض کرو کہ لا۱ اور ی۱ ایک نقطہ معلوم کی اور لا۲ اور ی۲ دوسرے نقطہ معلوم کے محددین ہین اور فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہہ ہو کہ

$$\text{ی} = \text{م}\ \text{لا} + \text{س} \quad . \ . \ . \ (۱)$$

چونکہ خط (لا۱ و ی۱) و (لا۲ و ی۲) مین گذرتا ہی

$$\text{ی}_۱ = \text{م}\ \text{لا}_۱ + \text{س} \quad . \ . \ . \ . \ (۲)$$

$$\text{ی}_۲ = \text{م}\ \text{لا}_۲ + \text{س} \quad . \ . \ . \ . \ (۳)$$

مساوات (۱) کو (۲) مین سے تفریق کرنے سے

$$\text{ی} - \text{ی}_۱ = \text{م}\ (\text{لا} - \text{لا}_۱) \quad . \ . \ . \ . \ (۴)$$

مساوات (۲) کو مساوات (۳) مین سے تفریق کرنے سے

$$\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱ = \text{م}\ (\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)$$

پس معلوم ہوا کہ $\text{م} = \frac{\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱}{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱}$

م کی قیمت کو مساوات (۴) مین داخل کرو تو

$$\text{ی} - \text{ی}_۱ = \frac{\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱}{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱}\ (\text{لا} - \text{لا}_۱) \quad . \ . \ . \ . \ (۵)$$

ہم اس مساوات کو اسطرح بہی لکھہ سکتے ہین کہ

$$(\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱)(\text{ی} - \text{ی}_۱) = (\text{ی}_۲ - \text{ی}_۱)(\text{لا} - \text{لا}_۱) \quad . \ . \ . \ (۶)$$

بعض خاص صورتین بہی یہان بیان کرنی ضرور ہین — فرض کرو کہ ی۲ = ی۱ تو مساوات (۶) یہہ ہوجائیگی کہ (لا۲ − لا۱) (ی − ی۱) = ۰ اسواسطے ی = ی۱ پس خط مطلوب متوازی محور لا کا ہوگا علی ہذا القیاس اگر لا۲ = لا۱ تو (۶) کی یہہ صورت ہوگی کہ (ی۲ − ی۱) (لا − لا۱) = ۰ اسواسطے لا = لا۱ تو خط مطلوب متوازی محور ی کا ہوا — اب اخر یہہ فرض کرو کہ نقطہ (لا۱ و ی۱)

ہو تو لا۱ = ۰ اور ی۱ = ۰ تو مساوات (۶) کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$\text{لا}_2\,\text{ی} = \text{ی}_2\,\text{لا}$$

طالب علم شکلین مرتسم کر کے ان خاص صورتون کی توضیح اور تشریح کرے

(۳۶) دفعہ ۳۵ کی مساوات (۶) تحویل سے یہہ ہو جایگی کہ

$$\text{لا}_1\text{ی} - \text{لا}\,\text{ی}_1 + \text{لا}_2\text{ی}_1 - \text{لا}_1\text{ی}_2 + \text{لا}\,\text{ی}_2 - \text{لا}_2\text{ی} = 0$$

اگر مساوات کی بائین طرف کو دفعہ ۱۱ کی مساوات (۲) کے اوس جملہ سے جو خطوط حد ائے ... کے اندر لکھا ہے ملائین تو صرف یہہ فرق ہوگا کہ لا اور ی بجای لا۳ اور ی۳ کے ہین پس اس مساوات سے یہہ معلوم ہوا کہ (لا و ی) و (لا۱ و ی۱) و (لا۲ و ی۲) مین خطوط ملانے سے رقبہ مثلث کا فنا ہوتا ہی اور اس حالت مین اس بات کا ہونا بدیہات سی ہی اسلئے کہ راس (لا، ی) قاعدہ پر واقع ہوتا ہے یعنی اوس خط مین جو نقاط (لا۱ و ی۱) و (لا۲ و ی۲) مین ملایا گیا ہے

(۳۷) مساوات اوس خط مستقیم کی دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم پر گذرتا ہی اور ایک اور خط مستقیم کو جو دو معلوم نقطون پر گذرتا ہی ایک نسبت معلوم پر تقسیم کرتا ہے

فرض کرو کہ (ح و ق) نقطہ معلوم اور (لا۱ و ی۱) و (لا۲ و ی۲) دو اور نقاط معلوم ہون خط جو اخر دو نقطون مین ملتا ہی وہ نسبت معلوم مین تقسیم ہوتا ہی اور یہہ نسبت معلوم وہ نسبت ہے جو ن۱ اور ن۲ رکھتی ہین تو موجب دفعہ ۱۰ کے محددین نقطہ تقسیم کی یہہ ہونگی

$$\frac{\text{ن}_1\text{لا}_2 + \text{ن}_2\text{لا}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} \quad \text{و} \quad \frac{\text{ن}_1\text{ی}_2 + \text{ن}_2\text{ی}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2}$$

تو دفعہ ۳۵ کی مساوات (۵) کے حکم سے مساوات مطلوب یہہ ہوگی

$$\text{ی} - \text{ق} = \frac{\dfrac{\text{ن}_1\text{ی}_2 + \text{ن}_2\text{ی}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} - \text{ق}}{\dfrac{\text{ن}_1\text{لا}_2 + \text{ن}_2\text{لا}_1}{\text{ن}_1 + \text{ن}_2} - \text{ح}}(\text{لا} - \text{ح})$$

$$\text{یا}\quad \text{ی} - \text{ق} = \frac{\text{ن}_1(\text{ی}_2 - \text{ق}) + \text{ن}_2(\text{ی}_1 - \text{ق})}{\text{ن}_1(\text{لا}_2 - \text{ح}) + \text{ن}_2(\text{لا}_1 - \text{ح})}$$

(۳۸) مساوات کی صورت اوس خط مستقیم کی دریافت کرو جو متوازی ایک خط معلوم کا ہو

فرض کرو کہ مساوات خط معلوم کی یہہ ہے کہ

$$ی = م_1 لا + س_1 \quad . \; . \; . \; . \; (۱)$$

و مساوات دوسرے خط $ی = م_2 لا + س_2$ . . . . (۲)

چونکہ خط جو مساوات (۱) (۲) سے تعبیر ہوتے ہین متوازی ہین تو وہ محور لا سے ایک ہی میل کرتے ہین

تو $م_2 = م_1$

تو (۲) مساوات یہہ ہوجائیگی کہ $ی = م_1 لا + س$

مقدار س کی تعین نہین ہوسکتی کیونکہ ایک خط مستقیم معلوم کے بے شمار خطوط مستقیم متوازی کھنچ سکتے ہین

(۳۹) دو خطوط مستقیم معلوم کے نقطہ تقاطع کے محددین دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات ایک خط کی یہہ ہو کہ

$$ی = م_1 لا + س_1 \quad . \; . \; . \; . \; (۱)$$

اور مساوات دوسرے کی $ی = م_2 لا + س_2$ . . . . (۲)

تو جس نقطہ پر دونو خط مستقیم تقاطع کرتے ہین اوس نقطہ کے محددین چاہئیے کہ دونو مساواتونکی شرطونکو پورا کرین اسواسطے ہمکو چاہیے کہ قیمتین لا اور ی کی مساوات (۱) اور (۲) سے دریافت کرین

$$لا = \frac{س_1 - س_2}{م_2 - م_1} \quad \text{اور} \quad ی = \frac{س_1 م_2 - س_2 م_1}{م_2 - م_1}$$

پس یہہ محددین مطلوبہ مین

(۴۰) تین خطوط مستقیم کے ایک نقطہ پر ملنے کے لئے جو شرط ضرور ہو اوسکو دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات تین خطوط کی یہہ ہون کہ

$$ی = م_1 لا + س_1 \; . \; . \; . \; (۱) \qquad ی = م_2 لا + س_2 \; . \; . \; . \; (۲)$$

$$ی = م_3 لا + س_3 \; . \; . \; . \; (۳)$$

(۱) اور (۲) کی خطوط کے نقطہ تقاطع کے محددین یہہ ہونگی

$$لا = \frac{س_1 - س_2}{م_2 - م_1} \quad \text{اور} \quad ی = \frac{س_1 م_2 - س_2 م_1}{م_2 - م_1}$$

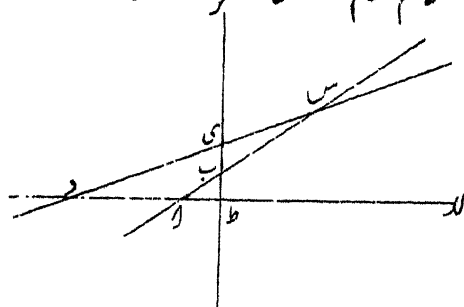
پس اگر تیسرا خط پہلے اور دوسرے کے نقطہ تقاطع پر گذرے تو یہہ قیمتین چاہئیے کہ مساوات (۳) کی شرائط کو پورا کرین اسسے معلوم ہوا کہ ضروری اور مکتفی شرط یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{س}_1 \text{م}_2 - \text{س}_2 \text{م}_1}{\text{م}_2 - \text{م}_1} = \text{م}_3 \frac{(\text{س}_1 - \text{س}_2)}{(\text{م}_2 - \text{م}_1)} + \text{س}_3$$

یعنی $\text{س}_1 \text{م}_2 - \text{س}_2 \text{م}_1 + \text{س}_2 \text{م}_3 - \text{س}_3 \text{م}_2 + \text{س}_3 \text{م}_1 - \text{س}_1 \text{م}_3 = ۰$

(۴۱) دو خطوط مستقیم معلوم کے درمیان کا زاویہ دریافت کرو

فرض کرو اب س ایک خط ہی اور دی س دوسرا خط ہی اور مساوات پہلے خط کی یہہ ہے کہ

$$\text{ی} = \text{م}_1 \text{لا} + \text{س}_1$$

اور مساوات دوسرے خط کی یہہ ہے کہ

$$\text{ی} = \text{م}_2 \text{لا} + \text{س}_2$$

تو مس ا س د = مس (س ا لا − س د لا)

$$= \frac{\text{مس س ا لا} - \text{مس س د لا}}{۱ + \text{مس س ا لا مس س د لا}}$$

$$= \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{۱ + \text{م}_1 \text{م}_2}$$

اسے ہم مستنبط کرتے ہیں کہ

$$\text{جم ا س د} = \frac{۱ + \text{م}_1 \text{م}_2}{\sqrt{[(۱ + \text{م}_1^2)(۱ + \text{م}_2^2)]}}$$

$$\text{جم ا س د} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{\sqrt{(۱ + \text{م}_1^2)(۱ + \text{م}_2^2)}}$$

(۴۲) ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم معلوم پر عمود ہی اوسکی مساوات کی صورت دریافت کرو

فرض کرو $\text{ی} = \text{م لا} + \text{س}$ مساوات خط معلوم کی ہو اور

$\text{ی} = \text{مَ لا} + \text{سَ}$ مساوات دوسرے خط کی ہو

تو مماس اوس زاویہ کا جو ان خطون کے درمیان ہی $\frac{\text{م} - \text{مَ}}{۱ + \text{م مَ}}$ ہوگا

اگر یہہ خط عمود ہین تو ۱ + م مَ = ۰

∴ مَ = − ۱/م

اسسے معلوم ہوا کہ ی = − لا/م + سَ

یہہ مساوات ایک عمود کو تعبیر کرتی ہے جو ایک خط

ی = م لا + س پر ہو

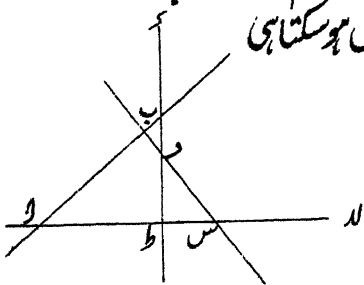
(۴۳) نتیجہ دفعہ گذشتہ اسطرح بہی حاصل ہو سکتا ہی



فرض کرو کہ ا ب خط معلوم ہی تو مس ب ا لا = م اور فرض کرو کہ س د عمود ا ب پر ہے تو

مس د س لا = − مس د س ط

= − مم ب ا ط

= − ۱/م

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات س د کی یہہ ہے کہ

ی = − لا/م + سَ

اسمین سَ = ط د

(۴۴) مساوات ایک خط مستقیم کی دریافت کرو جو ایک نقطہ پر گذرتا ہی اور عمود ایک خط معلوم پر ہے

فرض کرو کہ لا۱ و ی۱ محددین نقطہ معلوم کے ہین اور

ی = م لا + س . . . (۱)

مساوات خط معلوم کی ہی — صورت مساوات خط کی جو ایک نقطہ (لا۱ و ی۱) پر گذرتا ہے یہہ ہے کہ

ی − ی۱ = مَ (لا − لا۱) . . . (۲)

اگر (۲) عمود (۱) پر ہو تو

م مَ + ۱ = ۰

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوب یہہ ہے

ی − ی۱ = − ۱/م (لا − لا۱)

اور علی ہذا القیاس مساوات س ی یہہ ہوگی

ی ــ ق = مم ب (لد ــ ح)

(۳) فرض کرو کہ م = مس ب اس صورت مین مساوات س د کی یہہ ہوگی

ی ــ ق = ۲ مس ب / ۱ ــ مس ۲ ب (لد ــ ح)

یعنی ی ــ ق = مس ۲ ب (لد ــ ح)

اور مساوات س ی کی یہہ ہو جائیگی

ی ــ ق = ۰

پس س ی متوازی محور لا کا ہے

(۴) فرض کرو کہ م = مم ب تو مساوات س د کی اس صورت مین لکہی جائیگی

(ی ــ ق) (ب ــ مم مس ب) = (م + مس ب) (لد ــ ح)

اور ہم دیکھتے ہین کہ جب م = مم ب تو بائین طرف برابر صفر کے ہو جائیگی پس مساوات مطلوب یہہ ہوگی

لد ــ ح = ۰

تو مساوات س ی کی یہہ ہو جائیگی

ی ــ ق = مم ب ــ مس ب / ۲ (لد ــ ح)

= حم ۲ ب ــ جب ۲ ب / ۲ جم ب جب ب (لد ــ ح)

= مم ۲ ب (لد ــ ح)

(۵) فرض کرو کہ م = ــ مس ب تو مساوات س د کی یہہ ہو جائیگی

ی ــ ق = ۰

اور مساوات س ی کی یہہ ہو جائیگی

ی ــ ق = ــ ۲ مس ب / ۱ ــ مس ۲ ب (لد ــ ح)

= ــ مس ۲ ب (لد ــ ح)

(۶) فرض کرو کہ م = ــ مم ب تو مساوات س د کی یہہ ہو جائیگی کہ

ی ــ ق = مس ب ــ مم ب / ۲ (لد ــ ح)

= ــ مم ۲ ب (لد ــ ح)

اور مساوات س ی کی اس صورت مین لکہی جائیگی

(ی ــ ق) (۱ + مم مس ب) = (م ــ مس ب) (لد ــ ح)

اور ہم دیکھتے ہین کہ جسوقت م = ــ مم ب کے ہو تو بائین طرف صفر ہو جائیگا تو مساوات مطلوب یہہ ہوگی کہ

(۷) فرض کرو کہ ب = $\infty$ تو $\frac{\text{لا} - \text{ح}}{\infty} = ۰$ تو مساوات س ۵۱ اسطرح لکھہ سکتی ہین

$$\text{ى} - \text{ق} = \frac{\text{م}\,\text{ب} + ۱}{\text{م}\,\text{ب} - \text{م}}\,(\text{لا} - \text{ح})$$

جب ب = $\infty$ تو $\frac{\text{م}}{\text{ب}} = ۰$ . تو مساوات یہہ ہوجایگی کہ

$$\text{ى} - \text{ق} = -\frac{۱}{\text{م}}\,(\text{لا} - \text{ح})$$

اور علی ہذا القیاس مساوات س ۵۱ کی صورت ہی اور یہہ نتیجہ مطابق نتیجہ دفعہ ۴۴ کے ہی ہمنے جو خاص صورتین یہہ لکھی ہین اُسے مطلب ہمارا یہہ ہے کہ طالب علم اسبات کا امتحان کرلے کہ وہ اصول عامہ کو اچھی طرح سمجھتا ہی یا نہین اور صور عامہ سے صور مخصوصہ مستنبط کرسکتا ہی یا نہین اوسکے لئے یہہ امر بکار آمد ہوگا اگر وہ موافق ان صورتون کے شکلین مرتسم کرکے اونکی تشریح کرے

(۴۷) ایک نقطہ معلوم سے جو خط مستقیم معلوم پر عمود نکالا جاے اوسکا طول دریافت کرو

فرض کرو کہ اب خط مستقیم معلوم ہے اور د نقطہ معلوم اور اوسکے ح اور ق محددین اور مساوات خط اب کی یہہ ہی کہ

$$\text{ى} = \text{م}\,\text{لا} + \text{س} \quad \ldots\ldots (۱)$$

تو مساوات خط کی جو نقطہ د سے گذرے اور عمود اب پر ہو بموجب دفعہ ۴۴ کے یہہ ہوگی

$$\text{ى} - \text{ق} = -\frac{۱}{\text{م}}\,(\text{لا} - \text{ح}) \quad \ldots\ldots (۲)$$

فرض کرو کہ $\text{لا}_۱$ اور $\text{ى}_۱$ محددین نقطہ ى کی ہین تو بموجب دفعہ ۹ کے

$$\text{دى}^۲ = (\text{لا}_۱ - \text{ح})^۲ + (\text{ى}_۱ - \text{ق})^۲ \quad \ldots (۳)$$

اب یہہ باقی رہا کہ $\text{لا}_۱$ اور $\text{ى}_۱$ کی جگہہ اونکی قیمتین (۳) مین داخل کرین اب چونکہ $\text{لا}_۱$ اور $\text{ى}_۱$ محددین نقطہ ى کی ہین یہہ وہ نقطہ ہی جسپر (۱) اور (۲) ملتے ہین تو

$$\text{ى}_۱ = \text{م}\,\text{لا}_۱ + \text{س} \quad \text{اور} \quad \text{ى}_۱ - \text{ق} = -\frac{۱}{\text{م}}\,(\text{لا}_۱ - \text{ح})$$

∴ م لا۱ + س = ق − ۱/م (لا۱ − ح)

∴ لا۱ = (م ق + ح − م س) / (۱ + م۲)

اور لا۱ − ح = (م ق − م۲ ح − م س) / (۱ + م۲)

= م / (۱ + م۲) (ق − م ح − س)

اور نیز ک۱ = م لا۱ + س = (م۲ ق + م ح + س) / (۱ + م۲)

اور ک۱ − ق = (م ح + س − ق) / (۱ + م۲)

∴ موافق (۲) کے دی۲ = م۲ / (۱ + م۲)۲ (ق − م ح − س)۲ + (ق − م ح − س)۲ / (۱ + م۲)۲

= (ق − م ح − س)۲ / (۱ + م۲)

اسے معلوم ہوا دی = (ق − م ح − ح) / √(۱ + م۲)

علامت نسب نما یہ وہ لینی چاہئے جس سے دی کی قیمت مثبت رہی اسلئے اگر شمار کنندہ مثبت ہو تو نسب نما کی بھی مثبت علامت جذر کی لینی چاہئے اور اگر منفی ہو تو منفی

اور ہم قیمت دی کی اسطرح بھی حاصل کر سکتے کہ دم معین کیجے جو اب سے نقطہ دھ پر ملے تو

دی = دھ جب دھی = دھ جم ھ ا م

اب طم = ح ∴ ھم = م ح + س اور دم = ق

∴ دھ = ق − م ح − س

اور نیز مس ھ ا م = م ∴ جم ھ ا م = ۱ / √(۱ + م۲)

∴ دی = (ق − م ح − س) / √(۱ + م۲)

اسے معلوم ہوا کہ اگر خط ی − م لا − س = ۰ پر عمود نقطہ (ح، ق۱) سے نکالا جاے اور ایک اور عمود بھی نقطہ (ح۲ و ق۲) سے تو نسبت پہلے عمود کی دوسرے عمود کے ساتھہ ایسی ہوگی جیسے نسبت تعدادوں ق۱ − م ح۱ − س کو بھی ق۲ − م ح۲ − س سے

(۴۸) ایک خط کا طول دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم سے کھینچا جاے اور سمت معلوم مین ایک خط معلوم سے ملے

فرض کرو کہ (ح و ق) نقطہ معلوم ہے اور فرض کرو کہ ایک خط نقطہ معلوم سے کھینچا گیا اور محور لا کے ساتھہ زاویہ گ پر مائل ہوا اور اس خط

ا لا + ب ی + س = ۰ . . . . . . (۱) سے

فرض کرو کہ نو طول مطلوب ہے اور لا اور ی محددین اوس نقطہ کے ہیں جہاں خط سے کھینچا گیا (۱) سے ملتا ہی تو موجب دفعہ ۲۷ کے

لا۱ – ح = لو جم گ اور ی۱ – ق = نو جب گ . . . . (۲)

نقطہ (لا۱، ی۱) (۱) پر ہی

∴ ا (ح + لو جم گ) + ب (ق + لو جب گ) + س = ۰

∴ لو = – (ا ح + ب ق + س) / (ا جم گ + ب جب گ)

(۳۴) اس باب میں ہم مساوات میں اس صورت کو کہ ی = م لا + س کام میں لائی ہیں طالب علم کو چاہیے کہ وہ اور قرینہ دار مساواتیں خط مستقیم کی کام میں لاوے اور اوسے سوالات حل کرے اور قرینہ دار صورتیں یہہ ہیں کہ

ا لا + ب ی + س = ۰

لا/س + ی/ص – ۱ = ۰

لا جم د + ی جب د – ع = ۰

جو نتایج حاصل ہونگی اونکا مقابلہ آسانی سے اون نتایج کے ساتھہ ہو سکتا ہی جو حاصل ہو چکی ہیں مثلاً دفعہ ۲۷ میں ہم خط معلوم کو اس مساوات سی تعبیر کرتے ہین کہ

ا لا + ب ی + س = ۰

تو نتیجہ جو حاصل ہوگا وہ مطابق اس قیمت کے ہوگا کہ

(ق – م ح – س) / √(۱ + م۲)

جب بجای م کی ہم – ا/ب اور س کے بجای – س/ب لکھین تو چاہیے یہہ نتیجہ حاصل ہو کہ

(ا ح + ب ق + س) / √(ا۲ + ب۲)

اور علی ہذا القیاس اگر خط معلوم اس مساوات سے تعبیر ہو کہ

$$\text{لا}\ \text{جم}\ \text{ھ} + \text{ی}\ \text{جب}\ \text{ھ} - \text{ع} = ۰$$

تو ہمکو دریافت ہوگا کہ عمود جو اوس کبیر (ح و ق) سے نکالا جاے

$$\pm\left(\text{ح}\ \text{جم}\ \text{ھ} + \text{ق}\ \text{جب}\ \text{ھ} - \text{ع}\right)$$ ہوگا

تو طول عمود کا جو نقطہ سے اس خط پر کھیچا جانے برابر عددی قیمت اوس جملہ کے ہوگا جو داہین طرف مساوات کے اوسوقت پیدا ہوگا کہ لا اور ی کی جگہہ نقطہ معلوم کی محددین رکہین — یہہ ایک بڑا نتیجہ ہی اسلئے ہم اوسکا امتحان نہایت تدقیق و تحقیق کے ساتھہ کرینگے

(۵۰) اگر مساوات خط کی کسی صورت مین معلوم ہو تو ہم اوسکو اسطرح فوراً بدل سکتے ہین کہ اوسکی رقمین اوس عمود کے طول مین جو مبدء سے نکالا جاے اور اوس میلان مین جو اس عمود کا محور لا کے ساتھہ ہو بیان کیجائین — مثلاً فرض کرو کہ مساوات یہہ ہے کہ

$$۲\text{لا} + ۳\text{ی} + ۴ = ۰$$

اسطرح علامتین تبدیل کرو کہ اخر رقم کی علامت منفی ہوجاے تو مساوات کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$-۲\text{لا} - ۳\text{ی} - ۴ = ۰$$

اور $\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}$ پر تقسیم کرو تو

$$-\frac{۲\text{لا}}{\sqrt{۱۳}} - \frac{۳\text{ی}}{\sqrt{۱۳}} - \frac{۴}{\sqrt{۱۳}} = ۰$$

اور یہہ اس صورت کی ہے کہ

$$\text{لا}\ \text{جم}\ \text{ھ} + \text{ی}\ \text{جب}\ \text{ھ} - \text{ع} = ۰$$

اور $\text{جم}\ \text{ھ} = -\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$ اور $\text{جب}\ \text{ھ} = -\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$ اور $\text{ع} = \frac{۴}{\sqrt{۱۳}}$

اس مین ھ ایسا زاویہ ہے جو درمیان ک اور $\frac{۳\text{ک}}{۲}$ کے واقع ہے

کوئی اور مثال بھی اسی ترکیب سے حل ہوسکتی ہی قاعدہ یہہ ہی کہ

سب رقمونکو ایک طرف جمع کرو اور اگر ضرورت ہو تو علامتین اسطرح بدل دو کہ اخر رقم کی علامت منفی ہوجاے غرض مساوات اس صورت کی بنجای کہ $\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ی} - \text{س} = ۰$ جسمین س مثبت ہے اور پھر $\sqrt{\text{ا}^۲ + \text{ب}^۲}$ پر تقسیم کرو تو مساوات یہہ ہوجایگی کہ

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲}} + \frac{\text{ب}\,\text{ی}}{\sqrt{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲}} - \frac{\text{س}}{\sqrt{\text{ا}^۲+\text{ب}^۲}} = ۰$$

پس یہہ صورت مطلوبہ مساوات کی ہے اور

جم ھ = ا / √(ا² + ب²) اور جب ھ = ب / √(ا² + ب²) اور ع = س / √(ا² + ب²)

پس اسطرح ہر مساوات جو ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اس صورت مین آسکتی ہے کہ

لا جم ھ + ی جب ھ − ع = ۰

اسمین ع مثبت مقدار ہی بشرطیکہ خط مبدء مین نہ گذرتا ہو اوسحالت مین ع = ۰ کے ہو جائیگا
جب ہم اس مساوات کو کام مین لاتے ہین کہ

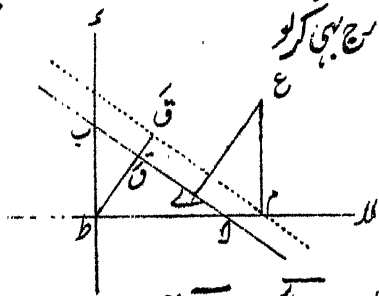
لا جم ھ + ی جب ھ − ع = ۰ ہم ہمیشہ ع کو مثبت فرض کرتے ہین

(۱۵) خط جسکی مساوات یہہ ہے

لا جم ھ + ی جب ھ − ع = ۰

اوسکو خط (ع ھ) کا کہتے ہین کیونکہ مستقل مقادیر ع اور ھ سے خط متعین ہوتا ہے
لیکن جہان اندیشہ کسی اور خط کے ساتہہ اوسکے خلط ملط ہونیکا نہو اوسکو اختصاراً خط ھ کا کہتے ہین
اور مساوات کا اختصار اسطرح لکہی جاتی ہے کہ ھ = ۰

اب ہم ایک اور طرح سے تحقیقات اوس عمود کی جلد کرینگے جو نقطہ معلوم سے خط (ع ھ) پر گذرتا ہو
فرض کرو کہ اب خط (ع ھ) کو تعبیر کرتا ہی اور ط مبدء ہی اور نقطہ (لا ی) ایسا ہی کہ ع اور
ط مقابل سمتون مین اب کے واقع ہین ط ق اور ع ی عمود اب پر نکالو اور ع م متوازی ط ی کا نکالو
اور نقطہ م سے خط متوازی اب کا نکالو جو ط ق اور ع ی سے ق اور ی پر ملے اور اگر
ضرورت پڑے تو ع ی کو خارج بہی کرلو

تو ط ق = ط م جم ھ = لا جم ھ اور ع ی = ع م جب ھ = ی جب ھ

ع ط = ط ق + ع ی − ط ق = لا جم ھ + ی جب ھ − ع

اگر ع اور ط ایک ہی جانب مین اب کے واقع ہون تو عمود کی واسطے یہہ حاصل ہوگا

ع − لا جم ھ − ی جب ھ

یہی نتائج تمام اختلافات مین حاصل ہونگے

(۵۲) یا اس طریقہ سے اس مطلب کو حاصل کرتے ہین

فرض کرو کہ لاجم ھ + ءجب ھ − ع = ۰

یہہ مساوات ایک خط مستقیم کی ہی اور لا و ء محددین اوس نقطہ کے ہین جسسے عمود نکالا جاے - اب مطلب یہہ ہے کہ طول عمود کا دریافت کیا جاے

مساوات کسی خط کی جو متوازی (۱) کا ہو اور مبدء کے اوسی جانب مین واقع ہو جس جانب مین خط واقع ہی یہہ ہوگی که

لاجم ھ + ءجب ھ − عَ = ۰ . . . . . (۲)

اسمین عَ عمود ہی جو مبدء سی اس خط پر نکالا جاے - اگر یہہ خط نقطہ (لَا و ءَ) پر گذری تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

لاَجم ھ + ءَجب ھ − عَ = ۰

∴ عَ = لاَجم ھ + ءَجب ھ

اور طول عمود کا جو (لَا و ءَ) سے (۱) پر نکالا جاے عَ − ع ہوگا اگر نقطہ اور مبدء خط کی مخالف جانبون مین واقع ہین اور ع − عَ ہوگا اگر وہ دونو خط کی ایک جانب مین واقع ہون یعنی

لاَجم ھ + ءَجب ھ − ع صورت اول مین اور

ع − لاَجم ھ − ءَجب ھ صورت دوم مین

اگر خط متوازی (۱) کا مبدء کی مخالف جانب مین واقع ہو تو مساوات یہہ ہوگی که

لاجم (ک + ھ) + ءجب (ک + ھ) − عَ = ۰

اسمین عَ طول عمود کا ہی جو مبدء سی اوسپر نکالا جاے - اگر یہہ خط نقطہ (لَا و ءَ) پر گذری تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

لاَجم ھ + ءَجب ھ + عَ = ۰

∴ عَ = − لاَجم ھ − ءَجب ھ

اور طول عمود کا (لَا و ءَ) سے (۱) پر مجموعہ عَ اور ع کا ہوگا یعنی

ع − لاَجم ھ − ءَجب ھ

اگر ہم زبر کو اڑا دین تو وہی نتیجہ حاصل ہوگا جو سابق مین حاصل ہوا تھا

(۵۳) پس عمود نقطہ (لا و ء) سے خط

لاجم ھ + ءجب ھ − ع = ۰ پر

اگر نقطہ (لا و ی) اور مبدء مخالف جانبون مین خط کی واقع ہین تو لا جم ھہ + ی جب ھہ – ع ہی
اور اگر دونو ایک ہی جانب مین مبدء کی واقع ہین تو وہ ع – لا جم ھہ – ی جب ھہ ہی
طالب علم کی دل مین یہہ خیال پیدا ہوگا کہ یہہ کیا بات ہی کہ جہان نقطہ کا ذکر ہی وہان بہی رموز لا
اور ی بیان ہوتی ہین اور جہان خط کا بیان ہی وہان بہی یہی رموز لا اور ی بیان ہوتی ہین
لیکن ہمارا نقطہ (لا و ی) کہنے سے مطلب یہہ نہین ہی کہ وہ نقطہ خط پر ہی یعنی ہماری مراد یہہ نہین ہی کہ لا
اور ی جو محددین نقطہ (لا و ی) کے ہین وہی قیمت رکہتی ہین جو خط لا جم ھہ + ی جب ھہ – ع = ۰ کے کسی نقطہ کے محددین
قیمت رکہتے ہین تاکہ یہہ مغالطہ نہ پڑی اسلئے ہمکو لا اور ی محددین نقطہ کے کام مین لانے چاہئے لیکن جو طریقہ اونکے
تحریر کا مذکور ہوا ہی اوسمین آسانی بہت ہی اور اس آسانی سے بہ نسبت اوس مغالطہ کہانیکے زیادہ فایدہ ہے
طالب علم کو توجہ اس بات پر کرنی چاہئے کہ ان رموز کے مختلف معنی لئے گئے ہین
(۴۸) دفعہ ۵ مین ہمنے اس بات کو طالب علم پر چہوڑ دیا ہی کہ وہ مختلف شکلین مرتسم کرکے اس بات کا یقین
کرلے کہ عمود نقطہ (لا و ی) سے خط (ع و ھہ) پر

± (لا جم ھہ + ی جب ھہ – ع) ہوگا

اور مبدء مختلف جانبون مین خط ع و ھہ کے واقع ہو تو اوپر کی علامت اور
جب ایک جانب مین واقع ہون تو نیچی کی علامت کام مین لانی چاہئے – اسطرح سے جو نتیجہ حاصل ہوتا ہے وہ تمام
رہتا ہی – دفعہ ۴ کی طرح ہم اول یہہ ثابت کرینگے کہ عمود ہمیشہ ان جملون

± (لا جم ھہ + ی جب ھہ – ع) مین سے کسی ایک کی برابر ہوگا

اور پہر اوسکی صورتون مین باہم تمیز کرینگے – اب جملہ لا جم ھہ + ی جب ھہ – ع منفی ہے جب نقطہ
(لا و ی) مبدء ہو کیونکہ وہ اس حالت مین برابر – ع کے ہوتا ہی اور نیز یہہ جملہ علامت نہین بدل سکتا
جب تک کہ (لا و ی) خط (ع و ھہ) کی اوسی جانب مین واقع ہی جس جانب مین مبدء ہی اسلئے کہ وہ
قیمت نہین بدل سکتا جب تک اوسکی قیمت کی نوبت صفر پر نہ پہونچی اور وہ صفر یعنی معدوم نہین
ہوسکتا جب تک نقطہ (لا و ی) خط پر ہے – اسے معلوم ہوا کہ جملہ منفی رہتا ہی جب تک نقطہ (لا و ی)
اوسی جانب مین خط (ع و ھہ) کے ہو جس جانب مین کہ مبدء ہی علی ہذا القیاس جملہ مثبت ہوگا
جب نقطہ (لا و ی) کا مقام دوسری جانب مین خط (ع و ھہ) کے واقع ہی اور وہ آسانی سے

ثابت ہو سکتا ہی کہ لا د ی کے مناسب قیمتون کے مقرر کرنے سے جملہ مثبت ہوتا ہی ـ اسے معلوم ہوا کہ وہ ہمیشہ مثبت ہی اگر (لا د ی) اور مبدء مخالف جانبون مین واقع ہون ـ اس ترکیب کو ہم ناقص اسلئے کہتے ہین کہ فقرہ جو خط عرضی کے نیچے ہی وہ ایک ایسی بات ہی کہ اوسپر طالب علم کی توجہ کی نوبت ابتک ایسی نہین پہونچی کہ وہ اوسکا یقین کامل کرلے

(۵۵) اگر مساوات خط کی لا جم ھہ + ی جب ھہ = ج جسمین ع = ۰ کے ہوگیا ہو تو باوجود اس بات کے پہر بہی یہہ جملہ ± (لا جم ھہ + ی جب ھہ) طول عمود کا ہوگا جو نقطہ (لا د ی) سے اوسپر نکالا جائے ـ اب ہم یہان اس بات کو اسطرح بہی بیان کرتے ہین کہ مساوات کو اسطرح لکہتے ہین کہ اشکال ی کے مثبت ہون تو اون نقاط کی واسطے جو ایک ہی جانب مین خط کی محور ی کے مثبت حصہ کی طرف واقع ہون اوسسے عمود لا جم ھہ + ی جب ھہ ہوگا اور اون نقطون کے واسطے جو دوسری جانب مین واقع ہین عمود ـ (لا جم ھہ + ا جب ھہ) ہوگا ـ اگر چند شکلون کا باہم مقابلہ کرین تو یہہ بات آسانی سے سمجہہ مین آجائیگی

یا دفعہ ۵۴ کی طرح اس بات کو سمجہو

## غیر قائم الزاویہ محور یعنی محور یا منحرف

(۵۶) جو نتائج دفعات ۲۳ سے ۵۴ تک بیان ہوئے ہین وہ دونوں صورتون مین ثابت ہین خواہ محور قائم الزاویہ ہون یا منحرف لیکن دفعہ ۳۳ مین م کی معنی موافق محور یا منحرف کے لینے چاہئے زاویہ درمیانی دو خطوط مستقیم کا دریافت کرو جب محور منحرف ہون

فرض کرو کہ زاویہ محورون کے درمیان ہو اور ی = م$_1$ لا + س$_1$ مساوات ایک خط کی ہو ی = م$_2$ لا + س$_2$ مساوات دوسرے خط کی ہو اور ھہ$_1$ ھہ$_2$ زاویے ہون جو یہہ خطوط محور لا کے ساتہہ بناتے ہین اور ب اونکا درمیانی زاویہ ہو تو بموجب دفعہ ۴۲ کے

$$\text{س ھہ}_1 = \frac{\text{م}_1 \text{ جب د}}{1 + \text{م}_1 \text{ جم د}} \quad \text{اور س ھہ}_2 = \frac{\text{م}_2 \text{ جب د}}{1 + \text{م}_2 \text{ جم د}}$$

اسسے معلوم ہوا کہ س ب یا س (ھہ$_2$ ـ ھہ$_1$) =

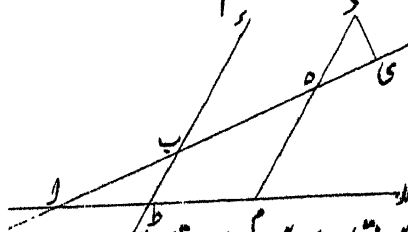
$$\frac{\dfrac{\text{م}_2 \text{ جب د}}{1 + \text{م}_2 \text{ جم د}} - \dfrac{\text{م}_1 \text{ جب د}}{1 + \text{م}_1 \text{ جم د}}}{1 + \dfrac{\text{م}_1 \text{ م}_2 \text{ جب}^2 \text{ د}}{(1 + \text{م}_1 \text{ جم د})(1 + \text{م}_2 \text{ جم د})}}$$

$$= \frac{(\text{م}_2 - \text{م}_1) \text{ جب د}}{1 + (\text{م}_1 + \text{م}_2) \text{ جم د} + \text{م}_1 \text{ م}_2}$$

اسے معلوم ہوا کہ خطوط ایک دوسرے پر زاویۂ قائمے بنائیں اسکے واسطے یہہ شرط ضرور ہے کہ

$$۱ + (م_۱ + م_۲) \text{ جم } د + م_۱ م_۲ = ۰$$

(۵۷) طول عمود کا دریافت کرو جو ایک نقطہ معلوم سے ایک خط مستقیم پر نکالا جاے

یہان ہم کو دفعہ ۴۷ کی طرح عمل کرنا چاہئے اور طالب علم کا مطلب اوس ترکیب سے کہ آغاز دفعہ مین مرقوم ہے حاصل ہو جائیگا

فرض کرو کہ اب خط مستقیم معلوم ہے د نقطہ معلوم ہے اور (ح د ق) محددین ہین

فرض کرو کہ مساوات اب کی یہہ ہے

$$ی = م \text{ لا} + س$$

متوازی ط ی کا نکالو اور دی عمود اب پر نکالو تو

$$\overline{دی} = \overline{دھ} \text{ جب } \overline{دھی}$$

اب $\overline{دھ} = \overline{دم} - \overline{ھم} = ق - (م ح + س) = ق - م ح - س$

اور فرض کرو کہ ب ا لا = ھ تو $\overline{دھی}$ یا ا ھ م = د - ھ

اور $\frac{\text{جب } ھ}{\text{جب } (د - ھ)} = م$ بموجب دفعہ ۴۴ کے

یا $\text{جب } (د - ھ) = \frac{\text{جب } ھ}{م} = \frac{\text{جب } د}{\sqrt{۱ + ۲ م \text{ جم } د + م^۲}}$ دفعہ ۲۴

$$\therefore \overline{دی} = \frac{(ق - م ح - س) \text{ جب } د}{\sqrt{(۱ + ۲ م \text{ جم } د + م^۲)}}$$

اگر ایک خط نقطہ د سے اب پر زاویہ ب بنائے تو اوسکا طول دی قم ب ہوگا

اور چونکہ دی معلوم ہے اسلئے وہ بھی معلوم ہو جائیگا

اگر مساوات خط مستقیم کی دفعہ ۲۶ کی صورت مین یہہ ہو کہ

$$\text{لا جم } ھ + ی \text{ جب } ھ - ع = ۰$$

تو طول عمود کا جو نقطہ (لا ی) سے اوسپر نکالا جاے یہہ ہوگا

$$\pm (\text{لا جم } ھ + ی \text{ جم } ب - ع)$$

اسکا استنباط جملہ مذکورہ سے ہو سکتا ہے یا دفعہ ۱۰ کی طور پر معلوم ہو سکتا ہے

## قطبی محددین

(۵۸) قطبی مساوات اوس خط مستقیم کی دریافت کرو جو دو نقطون پر گذرتا ہے
فرض کرو کہ نق۱ اور ر۱ ایک نقطہ کے اور نق۲ اور ر۲ دوسرے نقطہ کے محددین ہین
اور فرض کرو کہ مساوات خط کی یہہ ہے کہ

نق جم (ر − ھ) = ع

یعنی نق جم ر جم ھ + نق جب ر جب ھ = ع . . . . . . . (۱)

اور چونکہ خط دو نقطون پر گذرتا ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

نق۱ جم ر۱ جم ھ + نق۱ جب ر۱ جب ھ = ع . . . . . . (۲)

نق۲ جم ر۲ جم ھ + نق۲ جب ر۲ جب ھ = ع . . . . . . (۳)

(۱) اور (۲) سے

(نق جم ر − نق۱ جم ر۱) جم ھ + (نق جب ر − نق۱ جب ر۱) جب ھ = ۰ (۴)

اور (۲) اور (۳) سے

(نق۱ جم ر۱ − نق۲ جم ر۲) جم ھ + (نق۱ جب ر۱ − نق۲ جب ر۲) جب ھ = ۰ (۵)

∴ (نق جم ر − نق۱ جم ر۱) / (نق۱ جم ر۱ − نق۲ جم ر۲) = (نق جب ر − نق۱ جب ر۱) / (نق۱ جب ر۱ − نق۲ جب ر۲)

اور بعد تحویل کے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

نق نق۱ جب (ر − ر۱) + نق۱ نق۲ جب (ر۲ − ر۱) + نق۲ نق جب (ر − ر۲) = ۰ (۶)

اس مساوات کے معنی ہندسیہ نہایت آسانی سے سمجھہ مین آتے ہین اسواسطے کہ اگر ہم شکل کھینچین اور ط کو مبدء قرار دین اور (ا و ب و ع) نقاط (نق و ر) و (نق۱ و ر۱) و (نق۲ و ر۲) ہون تو ہمکو صاف معلوم ہوتا ہے کہ مساوات (۶) جملہ بیانیہ اس امر واقعی کا ہے کہ ایک مثلث مثلثات ط ا ع اور ط ب ع اور ط ا ب مین سے برابر باقی دو مثلثون کے مجموعہ کے ہے

(۵۹) ہم پہلے بیان کر گئے ہین کہ مساوات درجہ اول کا مقام التقاط ایک خط مستقیم ہوتا ہے، اور جب ہم آگے بڑھینگے تو یہہ معلوم ہوا کہ اگر مساوات درجہ اول سے ایک درجہ زیادہ ہو تو اوسکے مطابق مقام التقاط ایک خط منحنی اکثر ہوتا ہی اب یہان ہم بعض مستثنی صورتین بیان کرتے ہین

فرض کرو کہ مساوات یہہ ہے کہ لا² − ۴ا لا + ۴ ا² + ی² = ۰

یہہ مساوات اسطرح لکھی جا سکتی ہے کہ (لا − ۲ا)² + ی² = ۰

تو ہم دیکھتے ہین کہ حل اس مساوات کا صرف یہی ہے کہ

ی = ۰ اور لا = ۲ا

پس ثابت ہوا کہ مطابق اس مساوات کے مقام النقاط مین صرف ایک نقطہ محور لا پر ہے جسکا فاصلہ مبدء سے ۲ا ہے — اب پہر فرض کرو کہ مساوات یہہ ہو کہ

لا² + ی² + ا² = ۰

اس مساوات کو کوئی حقیقی قیمت شرائط مساوات کو پیدا نہین کر سکتی یعنی اوسکی کوئی حقیقی قیمت ہی نہین اسلیئے اوسکی مطابق کوئی مقام النقاط بہی نہین ہو سکتا اور اکثر اس مطلب کو یون ادا کیا کرتے ہین کہ اس مساوات کا مقام النقاط ناممکن ہے — اسطرح ایک مساوات کا مقام النقاط ناممکن یا ایک نقطہ ہو سکتا ہی

(۶۰) ہم پہلے لکہ آئی ہین کہ مساوات ایک خط مستقیم کی ہمیشہ درجہ اول کی ہوتی ہی ایک مساوات درجہ اول سے زیادہ درجہ کی ایک ایسے مقام النقاط کو تعبیر کر سکتی ہی جو دو یا زیادہ خطوط مستقیم سے شامل ہو کر بنا ہو — مثلاً فرض کرو

لا² − ی² = ۰ . . . . . . (۱)

لا = ی . . . . (۲) یا ی = لا . . . (۳)

اگر محددین ایک نقطہ کی (۲) و (۳) مین سے کسی ایک کی شرائط کو پورا کرتے ہین تو مساوات (۱) کی شرائط کو بہی پورا کرینگی یعنی ہریک نقطہ جو مساوات (۲) کے مقام النقاط مین مندرج ہے وہ مساوات (۱) کے مقام النقاط مین بہی درج ہی اور جو نقطہ (۳) مین درج ہے وہ (۲) مین درج ہے

اسے معلوم ہوا کہ (۱) تعبیر دو خطوط مستقیم کو کرتی ہی جو مبدء پر گذرتی ہین اور ہریک زاویہ ۴۵° اور ۱۳۵° کا محور لا سے بناتے ہین

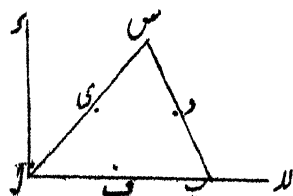
(۶۱) مساوات کے اندر مقادیر متغیر مین سے ایک ہی مقدار ملتفت ہو تو وہ ایک سلسلہ خطوط کو جو محوروں مین سے کسی ایک کے متوازی ہون تعبیر کریگی — اگر کوئی مساوات ح (لا) = ۰ ہو

تو اوسکے حل کرنے سے ہم ایک سلسلہ لا کی قیمتون کا دریافت کرینگے کہ لا = ا، یا لا = ا۲
اور ہر ایک قیمت انمین سے ایک خط کو تعبیر کریگی جو محور ی کا متوازی ہو — علی ہذا القیاس
اگر ح (ی) = ۰ تو وہ سلسلہ خطوط کو تعبیر کریگی جو محور لا کی متوازی ہون
مساوات اس صورت کی کہ ح (ی/لا) = ۰ ایک سلسلہ خطوط کو تعبیر کرتی ہی جو مبدء پر گذرین
اسواسطے کہ مساوات کے حل کرنے سے ہم ایک سلسلہ ی/لا کی قیمتون کا دریافت کرینگے اور وہ قیمتین
یہہ ہونگین کہ ی/لا = م۱ اور ی/لا = م۲ ۰۰ اور ہر ایک ان مساواتون مین سے ایک خط
کو تعبیر کریگا جو مبدء مین گذرتا ہی — اگر مساوات ح (لا) = ۰ ۰ ح (ی) = ۰
یا ح (ی/لا) = ۰ کوئی حقیقی قیمت نہ رکھتی ہو تو اونکے مطابق مقام النقاط ناممکن ہوگا
یہہ مساوات کہ ا ی² + ب لا ی + س لا² = ۰
اس صورت مین لکھی جاوے کہ ا (ی/لا)² + ب ی/لا + س = ۰
چونکہ یہہ مساوات درجہ دوم باعتبار ی/لا کے ہے تو ہمکو اوسکے دو قیمتین دریافت ہونگین
فرض کرو کہ ی/لا = م۱ اور ی/لا = م۲ اسے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات اکثر دو خطون کو تعبیر
کریگی جو مبدء مین گذرتی ہین — اگر ب² کم ۴ا س سے ہو تو م۱ اور م۲ ناممکن ہو جاینگی اور
صرف حل مساوات کا یہہ رہ جائیگا کہ لا = ۰ اور ی = ۰ یعنی مقام النقاط ایک نقطہ واحد ہے
یعنی مبدء ہے

(۶۲) یہہ ظاہر ہی کہ اگر مقام النقاط مساوات ح (لا، ی) = ۰ کا مبدء کی نقطہ پر گذرے تو قیمتین
لا = ۰ اور ی = ۰ مساوات کی شرائط کو پورا کرینگی پس ہم فقط ایک نظر ڈالنے سے مساوات
پر یہہ تبلا دینگے کہ مقام النقاط مبدء پر گذرتا ہے یا نہین

(۶۳) دفعہ ۳۹ مین ہم نے محددین نقطہ تقاطع دو خطوط مستقیم کے دریافت کئے ہین اس شکل کو
ہم اسطرح شکل عامہ بناتے ہین فرض کرو کہ ح (لا، ی) = ۰ ح۱ (لا، ی) = ۰ تو یہ
دو خطوط منحنی کو تعبیر کرتے ہین تو محددین نقطون کی جنپر وہ تقاطع کرینگے ان ہمراہ مساواتون
حل کرنے سے متعین ہونگے — یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر ایک مساوات ن درجے کی ہو

اور دوسری مساوات م درجہ کی تو اونکی نقاط مشترک کی تعداد م ن سے زیادہ
نہین ہو سکتی (رسالہ مسائل معادلات باب ستم کو دیکھو)

(۴۴) جو مسائل اوپر ہم نے ثابت کئے ہین اونکو خواص مثلث کے ثابت کرنے مین استعمال لاتے ہین
- خطوط جو مثلث کے کونون کے نقطون سے نقاط وسط اضلاع مقابل مین ملائے جائین تو وہ ایک
نقطہ پر ملینگے - فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اور د ی ف نقاط وسط اضلاع کے
پس ا کو مبدء قرار دو اور ا ب محور لا کی سمت اور نقطہ ا سے ایک عمود ا ب پر محور ی کے
لئے نکالو اور فرض کرو کہ ا ب = ا اور لاَ و یَ محددین نقطہ س کے ہین

چونکہ د نقطہ وسط س ب کا ہی تو بموجب دفعہ ۱ کے محدد د کا $\frac{1}{2}$ (لاَ + ا) ہی اور اوسکا
معین $\frac{\text{یَ}}{2}$ ہی اور چونکہ ی نقطہ وسط ا س کا ہی تو محدد نقطہ ی کا $\frac{\text{لاَ}}{2}$ ہی اور اوسکا
معین $\frac{\text{یَ}}{2}$ ہی اور چونکہ ف نقطہ وسط ا ب کا ہی اسلئے اوسکا محدد $\frac{\text{ا}}{2}$ ہی اور اوسکا
معین صفر ہے اس سے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۵ کے

مساوات ا د کی $\text{ی} = \frac{\text{یَ لا}}{\text{لاَ} + \text{ا}}$ . . . . (۱)

اور مساوات ب ی کی $\text{ی} = \frac{\text{یَ}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{لاَ} - 2\text{ا}}$ . . . . (۲)

اور مساوات س ف کی $\text{ی} = \frac{\text{یَ}(2\text{لا} - \text{ا})}{2\text{لاَ} - \text{ا}}$ . . . . (۳)

ہم نقطہ تقاطع (۲) (۳) کے دریافت کرنے کے لئے ہم یہہ لکھتے ہین کہ

$$\frac{\text{یَ}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{لاَ} - 2\text{ا}} = \frac{\text{یَ}(2\text{لا} - \text{ا})}{2\text{لاَ} - \text{ا}}$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{ا})(2\text{لاَ} - \text{ا}) = (2\text{لا} - \text{ا})(\text{لاَ} - 2\text{ا})$$

$$\therefore 3\text{ا لا} = \text{ا}(\text{لاَ} + \text{ا})$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{1}{3}(\text{لاَ} + \text{ا})$$

اس قیمت کو مساوات (۲) مین لکھو تو ہمکو معلوم ہوتا ہی کہ

ی = ...

اسطرح سے ہم نے محدد نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) کے دریافت کئے اور سوا اسکے ہم یہہ دیکھتے ہین کہ یہہ قیمتین (۱) کی بہی شرائط کو پورا کرتی ہین اسے معلوم ہوا کہ جو خط (۱) سے تعبیر ہوتا ہے وہ اون خطون کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہی جو (۲) اور (۳) سے تعبیر ہوتے ہین اور اسسے دعوی ثابت ہی

خطوط جو مثلث کے کونون کے نقاط سے عمود متقابل کے اضلاع پر نکالے جائین وہ ایک نقطہ پر ملینگے مساوات ب س کی بموجب دفعہ (۳۵) کے

ی = ... (لا − ا)

اسسے معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ ۴۹ کے مساوات خط کی جو نقطہ ا سے عمود ب س پر نکالا جاے یہہ مساوات ہوگی ی = − ... لا . . . . . . (۴) ہی

اور مساوات اس کی یہہ ہے کہ ی = ... لا

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات خط کی جو نقطہ ب سے عمود ا س پر نکالا جاے یہہ ہے

ی = − ... (لا − ا) . . . (۵)

تو خط جو نقطہ س سے ا ب پر عمود نکالا جائیگا متوازی محور ی کا ہوگا اور اوسکی مساوات بموجب دفعہ ۱۵ کے یہہ ہوگی

کہ لا = لا . . . . . (۶)

اب نقطہ تقاطع (۵) اور (۶) کے لئے

لا = لا اور ی = − ... (لا − ا)

اور ان قیمتون سے (۴) کی شرائط بہی پوری ہوتی ہین تو اسسے معلوم ہوا کہ خط جو (۴) سے تعبیر ہوتا ہے وہ نقطہ تقاطع (۵) اور (۶) پر گذرتا ہے

خطوط جو اضلاع کے نقاط وسط سے عمود اضلاع پر نکالے جائین وہ ایک نقطہ پر ملتے ہین

نقطہ د سے جو عمود ب س پر نکالا جاے اوسکی مساوات یہہ ہے کہ

ی − یَ/۲ = − (لاَ − ۱)/یَ (لا − (۱ + لاَ)/۲) . . . . . (۷)

نقطہ ی سے جو عمود س ا پر نکالا جاے اوسکی مساوات یہہ ہوگی

ی − یَ/۲ = − لاَ/یَ (لا − لاَ/۲) . . . . (۸)

نقطہ ف سے جو عمود ا ب پر نکالا جاے اوسکی مساوات یہہ ہوگی

لا = ۱/۲ . . (۹)

اب نقطہ تقاطع (۸) اور (۹) پر یہہ ہم کو حاصل ہوگا

لا = ۱/۲ اور ی = یَ/۲ − لاَ/یَ (۱/۲ − لاَ/۲)

ان سے شرائط مساوات (۷) بہی پوری ہوتی ہین اسسے معلوم ہوا کہ (۷) و (۸) و (۹) جن خطوط کو تعبیر کرتے ہین ایک نقطہ پر ملتے ہین

فرض کرو کہ اول شکل مین تینون خط نقطہ ع پر ملتے ہین اور دوسرے شکل مین تینون خطوط نقطہ ق پر اور تیسری شکل مین تینون خطوط نقطہ ر پر تو ہم یہہ ثابت کرینگے کہ ع اور ق اور ر ایک خط مستقیم مین ہونگے محددین نقطہ ع کے لا = ۱/۳ (لاَ + ۱) اور ی = یَ/۳

اور نقطہ ق کے لا = لاَ اور ی = لاَ/یَ (۱ − لاَ)

اور نقطہ ر کے لا = ۱/۲ اور ی = یَ/۲ − لاَ (۱ − لاَ)/۲ یَ

اسسے معلوم ہوا کہ جو خط نقطہ ع اور ق پر گذرتا ہے اوسکی مساوات یہہ ہے

ی − یَ/۳ = (لاَ/یَ (۱ − لاَ) − یَ/۳)/(لاَ − ۱/۳ (لاَ + ۱)) (لا − (لاَ + ۱)/۳) . . . . (۱۰)

اس مساوات مین لا = ۱/۲ کے مندرج کرو تو

ی − یَ/۳ = (لاَ/یَ (۱ − لاَ) − یَ/۳)/(۱/۳ (۲ لاَ − ۱)) (۱/۲ − لاَ/۳ − ۱/۶)

= − ۱/۲ [لاَ/یَ (۱ − لاَ) − یَ/۳]

∴ ی = − لاَ (۱ − لاَ)/۲ یَ + یَ/۶ + یَ/۳

= یَ/۲ − لاَ (۱ − لاَ)/۲ یَ

اسے ثابت ہوا کہ نقطہ ر اوس خط مین ہے جو مساوات (۱۰) سے تعبیر ہوتا ہے اسواسطے کہ محددین ر سے (۱۰) کے شرایط پوری ہوتی ہین

## امثلہ

(۱) مساواتین اون خطوط کی دریافت کرو جو نقطہا ذیل مین سے دو دو مین گذرین

(۱) (۱ و ۰) اور (۱− و ۱)
(۲) (۳ و ۲) اور (۴ و ۲)
(۳) (۱ و ۱) اور (۲− و ۲−)
(۴) (ل و ۰) اور (ب− و ۰)

(۲) اون خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو نقطہ (۴ و ۴) پر گذرتے ہین اور خط ی = ۲ لا پر زاویہ میلان ۴۵° کا بناتے ہین

(۳) اون خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو نقطہ (۱ و ۰) پر گذرتی ہین اور خط ی + لا = ۲ پر زاویہ میلان ۳۰° کا بناتے ہین

(۴) اون خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو مبدء مین گذرتی ہین اور خط لا = ۲ پر زاویہ میلان ۴۵ کا بناتی ہین

(۵) اون خطوط کی مساواتین دریافت کرو جو مبدء مین گذرتی ہین اور خط لا + ی √۳ = ۱ پر زاویہ ۶۰° کا بناتی ہین

(۶) زاویہ درمیانی خطوط لا + ی = ۱ اور ی = لا + ۲ کا دریافت کرو اور اونکی نقطہ تقاطع کے محددین دریافت کرو

(۷) زاویہ درمیانی خطوط لا + ی √۳ = ۰ اور لا − ی √۳ = ۲ کا دریافت کرو

(۸) زاویہ درمیانی خطوط لا + ۳ ی = ۱ اور لا − ۲ ی = ۱ کا بتلاؤ

(۹) اون خطوط مستقیم کی مساواتین دریافت کرو جو محور لا کے نقطہ معلوم پر گذرتی ہین اور محور لا پر ۴۵° کا زاویہ بناتی ہین

(۱۰) مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو مبدء مین گذرتا ہے اور عمود خط لا + ی = ۲ پر ہے

(۱۱) عمودی فاصلہ نقطہ (۱ و ۲−) کا خط لا + ی − ۳ = ۰ سے دریافت کرو

(۱۲) نقطہ (ل و ب) سے جو عمود خط $\frac{لا}{ل}$ + $\frac{ی}{ب}$ = ۱ پر نکالا جاے اوسکا طول دریافت کرو

(۱۳) خطوط $\frac{لا}{ل}$ + $\frac{ی}{ب}$ = ۱ اور $\frac{لا}{ب}$ + $\frac{ی}{ل}$ = ۱ کا نقطہ تقاطع دریافت کرو

(۱۴) مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو نقطہ (ا و ب) پر اور نقطہ تقاطع
لا/ا + ی/ب = ۱ اور لا/ب + ی/ا = ۱ پر گذرتا ہے

(۱۵) مقام النقاط مساوات ہاء ذیل کی دریافت کرو

(۱) لا^۲ + ی^۲ = ۰		(۲) لا^۲ − ی^۲ = ۰
(۳) لا^۲ + لا ی = ۰		(۴) لا ی = ۰
(۵) لا^۲ + ی^۲ + ا^۲ = ۰		(۶) لا (ی − ا) = ۰

(۱۶) ان مساواتون کے معنی بیان کرو
(۱) (لا − ا) (ی − ب) = ۰
(۲) (لا − ا)^۲ + (ی − ب)^۲ = ۰
(۳) (لا − ی + ا)^۲ + (لا + ی − ا)^۲ = ۰

(۱۷) کون سے خطوط اس مساوات سے تعبیر ہوتے ہین کہ
ی^۲ − ۴ ی لا + ۳ لا^۲ = ۰

(۱۸) ثابت کرو کہ ۳ ی^۲ − ۸ لا ی − ۳ لا^۲ + ۲۹ لا − ۲۷ = ۰ اون دو خطون کو تعبیر کرتی ہی جو ایک دوسرے کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتے ہین

(۱۹) ذوار بعۃ الاضلاع کے وترون کی مساواتین دریافت کرو اوسکی اضلاع ان مساواتون سے تعبیر ہوتی ہین لا = ۴ ی = ۵ ی = لا اور ی = ۲ لا

(۲۰) ا ب س د ی ف ایک مسدس منتظم ہی ا کو مبدء مقرر کرو اور ا ب ایک محور لا کا ہی اور ایک خط نقطہ ا سے عمود ا ب پر نکال کر محور ی قرار دو تو مساواتین اون سب خطوط کی دریافت کرو جو مسدس کے دو دو کونون کے نقطون مین ملائی جائین

(۲۱) ایک مثلث کے کونون کے نقطون کے محددین معلوم ہین تو مساوات اوس خط کی دریافت کرو جو دو ضلعون کے نقاط وسط ملایا جاے

(۲۲) مماس اوس زاویہ کا دریافت کرو جو درمیان خطوط
ی − م لا = ۰ اور م ی + لا = ۰ واقع ہو اور محور محرف ہین

(۲۳) خطوط ی + لا = ۰ اور ی − لا = ۰ ایک دوسرے پر قائمہ بناتے ہین اور مبلاً محور قائم الزاویہ ہونگے یا منحرف

(۲۴) متوازی الاضلاع کے دو ضلعے اور اونکی درمیان کا زاویہ معلوم ہی تو اوسکی قطرونکی

مساواتین لکھو اور اونکے درمیان کا زاویہ دریافت کرو اور ایک اوسکے کونہ کے نقطہ کو مبدء اور اوسکے دو ضلعون کو جو اوس نقطہ پر ملتے ہین محور قرار دو

(۲۵) دفعہ ۷۶ کے شکل مین ب ا اور ب س کو لا و ی کے محور مقرر کرو اور فرض کرو کہ ب ا = ا اور ب س = س اور ح اور ق محددین نقطہ د کے ہین تو مساواتین ا س اور ب د اور ا د اور س د کی بناؤ

(۲۶) سب باتین مثال ۲۵ کی فرض کرکے ا س اور ب د کی نقاط وسط کی محددین دریافت کرو اور اوس خط کی مساوات بتلاؤ جو ان نقطون پر گذرتا ہے

(۲۷) سب باتین مثال گذشتہ کی فرض کرو تو ی ف کے نقطہ وسط کی محددین دریافت کرو اور ثابت کرو کہ یہہ نقطہ اوس خط مین واقع ہوتا ہے جو ا س اور ب د کے نقاط وسط مین ملایا جاوے

(۲۸) اگر $\frac{لا}{ا} + \frac{ی}{ب} = ۱$ اور $\frac{لا}{ا'} + \frac{ی}{ب'} = ۱$ مساواتین اون دو خطوط کی ہون جو محددین محورون کے ساتھہ (خواہ وہ قائم الزاویہ ہون خواہ منحرف) مساوی رقبون کے محیط ہوتی ہین اور لا اور ی محددین اونکے نقطہ تقاطع کے ہین تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ی}{لا} = \frac{ب - ب'}{ا - ا'}$$

(۲۹) کون سے نقطے محور لا پر خط $\frac{لا}{ا} + \frac{ی}{ب} = ۱$ سے عمودی فاصلہ ا رکھتی ہین

(۳۰) مساوات خط کی یہہ ہے کہ $\frac{لا}{ا} + \frac{ی}{ب} = ۱$ جو نقطہ اس خط مین ہو اوسکی محددین کے دریافت کرنیکے لئے مساوات دریافت کرو اور نقطہ معلوم (س، ص) سے اس خط کا فاصلہ ایک خط معلوم س کے برابر ہے اور ثابت کرو کہ اکثر ایسی دو نقطون ہونگی اور خاص صورتون مین دونو نقطے منطبق ہونگی اور س $(ا^۲ + ب^۲) = (ا ص + ب س - ا ب)^۲$

(۳۱) جو دو خط مساوات ذیل سے تعبیر ہوتے ہین اونکی درمیان کے زاویہ کا مماس دریافت کرو

$$ا ی^۲ + ب لا ی + س لا^۲ = ۰$$

(۳۲) نقاط تقاطع ان خطوط مستقیم لا + ۲ ی - ۵ = ۰ اور ۲ لا + ی - ۷ = ۰ اور ی - لا - ۱ = ۰ کے دریافت کرو اور ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا جو اون سے بنے گا ۲ ہوگا

(۳۳) رقبہ مثلث کا جو خطوط مستقیم ی = لا ٹس ھ، اور ی = لا ٹس ب اور ی = لا ٹس ی + ...

بنتا ہے یہہ ہے کہ $\frac{\text{س}}{\text{۲}}$ جب (ھ - ب) جم ی / ۲ جب (ھ - ی) جب (ب - ی)

(۳۴) مساواتین دو خطوط مستقیم متوازیہ کی معلوم ہین اون کے درمیان کا فاصلہ دریافت کرو

(۳۵) زاویہ درمیانی ان خطوط کا دریافت کرو

مثلاً = ۴ جم ر + ۳ جب ر اور ص / ی = ۳ جم ر - ۴ جب ر

(۳۶) معنی ح (ر) = ۰ کے بیان کرو مثلاً جب ۳ ر = ۰

(۳۷) اگر محور زاویہ د پر مائل ہون تو یہہ خطوط ا لا + ب ی + س = ۰

اور اَ لا + بَ ی + سَ = ۰ یکسان مائل محور لا سے مخالف سمتون مین جب رہینگے کہ

ب / ا + بَ / اَ = ۲ جم د کے ہو

(۳۸) مثال گذشتہ مین علاوہ یکسان میل محور لا کے ساتھہ رکھنے کے خطوط مبدء پر گذرین اور ایک دوسرے پر عمود ہون تو مساوات خطوط کی یہہ ہونگین کہ

لا۲ + ۲ لا ی جم د + ی۲ جم ۲ د = ۰

(۳۹) دو خطوط متوازی زاویہ ر بناتے ہوئے محور لا پر دو نقطون سے کہنچے گئی ہین جنکے محددین اوب اور اَ وبَ ہین تو ثابت کرو کہ ان خطوط کے درمیان فاصلہ (اَ - ب) جم ر - (اَ - ا) جب ر ہی تو وہ قائم الزاویہ معین کرو جسکے اضلاع چار نقاط معلوم پر گذرین اور رقبہ معلوم اوسکا رقبہ ہو

(۴۰) ایک مربع اسطرح متحرک ہوتا ہی کہ اوسکے قطرون مین سی ایک قطر کی دونو طرفین ہمیشہ دو خطوط مستقیم قائم اور متقاطع علی القوائم پر رہتی ہین اور یہہ دونو خطوط اوس سطح مین ہین جسمین مربع ہی تو ثابت کرو کہ اوسکی دوسری قطر کے دونو طرفین ہمیشہ دو اور خطوط مستقیم قایم اور متقاطع علی القوایم پر متحرک ہونگین

(۴۱) اب اور ب س دو خطوط ایک دوسرے پر عمود ہین اور ا ایک نقطہ قائم ہی اور ب ایک خط مستقیم معلوم پر متحرک ہے اور اب اور ب س مین نسبت معلوم ہی تو نقطہ س کا مقام انتقال متعین کرو

(۴۲) ط لا اور ط ی خطوط قایم ہین اور کسی زاویہ پر وہ ملتی ہین اور ایک خط طول معلوم کا ط لا پر سر کتا ہی اور ایک اور دوسرا خط طول معلوم کا ط ی پر سر کتا ہی تو مقام انتقال اوس نقطہ کا دریافت کرو جو اسطرح سے مقرر کیا جای کہ رقبی جو اوسکے اور خطوط متحرک کے انجاموں مین ملانے سے پیدا ہون مستقل ہون

(۴۳) ثابت کرو کہ خطوط ف س اور ک ب اور ا ل ہ ہشت ام مین ایک نقطہ پر قطع ہوتے ہین

(۴۴) اگر ایک مثلث کے اضلاع کو قطر بنا کر متوازی الاضلاع بنائین اسطرح سے کہ اونکی ضلعے متوازی دو خطوط معلوم کے رہین تو اور قطر متوازی الاضلاعون کے ایک نقطہ پر ملینگے

(۴۵) اگر ایک نقطہ قائم ط سے خط مستقیم کھینچین جو خطوط مستقیم قائم سے جو ایک سطح مین ہین نقاط ا و ب و س و د ۔ ۔ ۔ وغیرہ پر ملین پس اگر

$$\frac{ط}{ط لا} = \frac{ا}{ط ا} + \frac{ا}{ط ب} + \frac{ا}{ط س} + \cdots$$

اور لا ایک نقطہ ط ا پر ہو تو مقام النقاط لا کا ایک خط مستقیم ہے

(۴۶) ثابت کرو کہ رقبہ مثلث کا جو محور ی اور خطوط ی = م ا لا + س ا اور ی = م ۲ لا + س ۲ سے بنے یہہ ہوگا کہ $\frac{(س_2 - س_1)^2}{2(م_2 - م_1)}$

(۴۷) رقبہ مثلث کا جو ان خطون سے بنا ہے تحقیق کرو کہ ی = م ا لا + س ا اور ی = م ۲ لا + س ۲

(۴۸) رقبہ مثلث کا جو ان خطوط ی = م ۳ لا + س ۳ سے بنے کہ

ی = ا لا $- \frac{ب س}{۲}$ اور ی = ب لا $- \frac{ا س}{۲}$ اور ی = س لا $- \frac{ا ب}{۲}$

یہہ ہے کہ $\frac{(ا - ب)(ب - س)(س - ا)}{۸}$

# باب چہارم

## خطوط مستقیم

(۶۵) ہم پہلے بیان کر آئے ہین کہ ہر ایک مساوات ان مساواتون مین سے کہ

ا لا + ب ی + س = ۰ اور اَ لا + بَ ی + سَ = ۰

ایک خط کو تعبیر کرتی ہے ۔ اب ہم مساوات ا لا + ب ی + س + حج (اَ لا + بَ ی + سَ) = ۰ (ا) کے معنی بتلائینگے اسمین حج ایک مقدار مستقل ہے

**اول** مساوات (ا) ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے اسلئے کہ وہ درجہ اول کے مساوات متغادلین متغیر لا و ی کی ہے تو بموجب دفعہ ۱۶ کے ضرور اوسے ایک خط مستقیم تعبیر ہوگا

**دوم** خط جو (ا) سے تعبیر ہوتا ہے وہ ان خطون کے نقطہ تقاطع پر گذریگا جنکی مساواتین یہہ ہین

$$\text{اَ لا + ب ی + س} = 0 \quad (۲)$$
$$\text{اَ َ لا + بَ ی + سَ} = 0 \quad (۳)$$

اسواسطے کہ جو قیمتین لا اور ی کی ان مساواتون کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہی مساوات (۱) کی شرائط کو پورا کرتی ہین یعنی نقطہ جسپر (۲) اور (۳) تقاطع کرتی ہین (۱) پر واقع ہی

سوم مقدار مستقل مح کی قیمت مناسب مقرر کرنے سے مساوات (۱) ہر خط مستقیم کو تعبیر کر سکتی ہے جو نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) پر گذرے

اسواسطے کہ فرض کرو لا اور ی احداثین نقطہ تقاطع (۲) و (۳) کو تعبیر کرتے ہین اور ایک خط اس نقطہ پرسے گذرتا ہوا کھچا گیا ہے اور لام اور یم احداثین ایک دوسرے نقطے کے ہین جو اوس خط مین ہو ابھی ہمنے صورت دوم مین ثابت کیا ہی کہ خط (۱) لا اور ی مین گذرتا ہی پس اب ہم کو صرف یہہ ثابت کرنا باقی رہا کہ مح کے مناسب قیمت کی مقرر کرنی سی خط (۱) نقطہ لام اور یم مین گذرتا ہے اسواسطے کہ جو خطوط مستقیم دو نقطے مشترک رکہتے ہین وہ ایک دوسرے پر منطبق ہوجاتے ہین لام او ریم بجائے لا اور ی کے مساوات (۱) مین رکہو اور مح کی قیمت دریافت کرو جو شرائط مساوات کو پورا کرے پس اسطرح معلوم ہوگا کہ

$$\text{مح} = -\frac{\text{اَ لام + ب یم + س}}{\text{اَ َ لام + بَ یم + سَ}}$$

اب اس قیمت کو مساوات (۱) مین کام مین لاؤ تو مساوات

$$\text{اَ لا + ب ی + س} - \left(\frac{\text{اَ لام + ب یم + س}}{\text{اَ َ لام + بَ یم + سَ}}\right)\left(\text{اَ َ لا + بَ ی + سَ}\right) = 0 \quad (۴)$$

اوس خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقاط (لا، و ی،) اور (لام و یم) پر گذرتا ہے پس ہمنے ثابت کردیا کہ مح کی مناسب قیمت مقرر کرنے سے مساوات (۱) اوس خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ تقاطع (۲) اور (۳) پر گذرتا ہی

(۶۶) مسئلہ گذشتہ نہایت عظیم الشان مسئلہ ہی اور اکثر مبتدیون کو مشکل معلوم ہوتا ہے طالب علمون کو چاہیے کہ اوسکو چھوڑ نہ بیٹھے جبتک تینون دعوی جو اوسمین مذکور ہوئے ہین خوب نہ سمجھ لین — اول دعوی تو ظاہر ہی — دوسرے دعوی پر طالب علم اطمینان حاصل کرنیکے لئے قیمتین لا اور ی کی مساوات اَ لا + ب ی + س = ۰

اور ر اَ لا + بَ ی + سَ = ۰ کو حل کرکے دریافت کرے اور اونکو مساوات
ا لا + ب ی + س + مح ( اَ لا + بَ ی + سَ ) = ۰ مین رکھہ کر دیکھے کہ شرائط مساوات
پوری ہوتی ہین اگرچہ یہان کچھہ ضرورت مساواتون کے حل کرنیکی نہین ہے کیونکہ یہہ بات ظاہر ہے
کہ جو قیمتین لا اور ی کی ا لا + ب ی + س اور اَ لا + بَ ی + سَ کو فنا کرینگی وہ ضرور
ا لا + ب ی + س + مح ( اَ لا + بَ ی + سَ ) کو فنا کرینگی کیونکہ جب وہ ہر رکن کو
فنا کرتی ہین تو کل کو کیون نہ فنا کرینگی لیکن تیرا دعوی اکثر بہت مشکل معلوم ہوتا ہے طالب علم
جلدی سے یہہ کہنے لگتے ہین کہ اوسکے ثبوت کی ضرورت نہین ہے یہہ ظاہر ہے کہ مح کی مختلف
قیمتون کی مقرر کرنے سے مختلف خطوط مساوات سے تعبیر ہونگی لیکن اسسے یہہ نہین ثابت ہوتا ہے
کہ قیمت مناسب مح کی مقرر کرنے سے (۱) اوس خط کو تعبیر کرتی ہی کہ نقطہ تقاطع (۲)
و (۳) سے تعبیر ہوتا ہی مثلاً اگر خط مستقیم (۲) اور (۳) د ص ی اور ف ص ح ہون
تو یہہ واقع ہو سکتا ہی کہ تمام خط جو (۱) سے تعبیر ہوتی ہین زاویہ ف ص د کے درمیان
واقع ہون اور کوئی ف ص ی کے درمیان نہ واقع ہو۔ لیکن اس بات
کے ثابت کرنیکی ضرورت ہی کہ مح کی قیمت مناسب
(۱) مین ایسی مقرر کرین کہ مساوات کسی خط کی جو نقطہ ص پر
گذرے دریافت ہوجاے

(۶۷) اس بات کی واسطے جس جملہ کو برابر صفر کی ہم لکھتے ہین اوسکو ہم ایک حرف سے تعبیر کرتے
مثلاً دفعہ ۱۵ مین ہم نے اختصاراً جملہ لا جم ہعہ + ی جب ہعہ − ع = ۰ کو صرف رفرہ سے
تعبیر کیا ہے اسیطرح ہم ایسی جملون ا لا + ب ی + س اور ر − م لا − س اور
لا/اَ + ی/بَ − ۱ ....... وغیرہ کے واسطے رموز لو اور مو اور ۰۰۰ نو ٹھہرائین ح
اب یہہ بھی معلوم رہی کہ دفعہ ۶۵ کا ثبوت خط مستقیم کی مساوات کی خواہ کچھہ ہی صورت ہو اسطرح
کام آسکتا ہی جس طرح کہ مساوات ا لا + ب ی + س = ۰ کے لئے کام مین آیا۔ اور
یہہ نتیجہ اسطرح بیان مین آسکتا ہی کہ اگر لو = ۰ اور مو = ۰ مساواتین دو خطوط مستقیم کی ہون

اور مح ایک مقدار مستقل ہو تو مساوات لو + مح مو = ۰ ایک خط مستقیم کو تعبیر کریگا جو نقطہ تقاطع ان دو خطوط مستقیم مین گذرتا ہی اور مح کی مناسب قیمت مقرر کرنے سے وہ کسی ایک خط مستقیم کو تعبیر کریگا اور ان دو خطون کے نقطہ تقاطع پر گذریگا

(۶۸) اگر لو = ۰ اور یو = ۰ دو خطوط مستقیم کی مساواتین ہون تو ہم پہلے ثابت کر آئی ہین کہ یو + مح مو = ۰ ایک خط مستقیم کو تعبیر کریگا جو نقطہ تقاطع پر گذری بعض اوقات اسمین نہایت آسانی ہی کہ ہم نہایت قرینہ کی صورت ل یو + م مو = ۰ کام مین لاتے ہین اور ل اور م دونو مستقل ہین یہہ ظاہر ہے کہ اول صورت کی نسبت جو بیان کیا گیا ہی وہی دوسری صورت کی نسبت بہی بیان کیا جاسکتا ہی اور فی الحقیقت دوسری صورت اول سی اسطرح مستنبط ہوسکتی ہے کہ بجائے م/ل کے مح لکھین یہہ بات ہمیشہ اس باب مین یاد رکہنی چاہیے کہ ل و م و ن ۰ ۰ مح مقادیر مستقل ہین اگرچہ انحصار کی نظر سے ہم ہر دفعہ اونکی مستقل ہونیکا اظہار نہین کرتے

(۶۹) علیٰ ہذا القیاس اگر لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ مساواتین تین خطوط مستقیم کی ہون اور ل و م و ن مقادیر مستقل ہون تو مساوات

ل لو + م مو + ن می = ۰ . . . . . . (۱)

ایک خط مستقیم کو تعبیر کریگی — سوا ازین مناسب قیمتین ل اور م اور ن کی مقرر کرنے سے ہم ہر خط مستقیم کو خواہ وہ کچھہ ہی ہو تعبیر کرسکتے ہین — اسواسطے کہ اگر ہم یہہ چاہین کہ مساوات اوس خط کو تعبیر کرے جو نقاط (لا، ی۱) اور (لا۲ اور ی۲) پر گذرتا ہی تو فرض کرو کہ لو۱ اور مو۱ اور می۱ قیمتین یو اور مو اور می کی لا کی جگہہ لا۱ اور ی کی جگہہ ی۱ کی رکہنی سی ہوجاتی ہین اور یو۲ اور مو۲ اور می۲ قیمتین یو و مو اور می کی بجای لا کے لا۲ اور ی کے ی۲ رکہنے سے ہوجاتی ہین تو بس قیمتین م/ل اور ن/ل ان مساواتون سے دریافت کرو کہ

ل یو۱ + م مو۱ + ن می۱ = ۰

ل یو۲ + م مو۲ + ن می۲ = ۰

فرض کرو کہ اونکی قیمتین اس طرح دریافت ہوتی ہین کہ

$\frac{م}{ن} = \frac{حی}{مح}$ اور $\frac{ل}{ن} = \frac{حح}{مح}$ ان قیمتون کو مساوات

یو + $\frac{م}{ن}$ مو + $\frac{ل}{ن}$ می = ۰ مین رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

یو + $\frac{حی}{مح}$ مو + $\frac{حح}{مح}$ می = ۰

یا مح لو + حی مو + حح می = ۰ یہہ مساوات تعبیر کرتی ہے اوس خط کو جو نقاط (لا۱و د۱) اور (لا۲ و د۲) مین سے گذرتا ہے ہم اوپر ذکر کر آئے ہین کہ مساوات (۱) ہر خط مستقیم کو اکثر تعبیر کر سکتی ہے اسلئے کہ بعض صورتین مستثنی ہین اونکا بیان ہم کرتے ہین

جب خطوط جو ان مساواتون یو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ سی تعبیر ہوتے ہین ایک نقطہ پر ملتے ہین تو مساوات (۱) بالضرور اوس خط سے تعبیر ہوتی ہی جو اوس نقطہ پر گذرتا ہی

اسواسطے کہ خطوط معلومہ ایک نقطہ پر ملتے ہین تو یو و مو اور می اوس نقطہ پر ایک ہی وقت مین فنا ہوتی ہین پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) سے جو خط تعبیر کرتا ہی وہ اوس نقطہ پر گذرتا ہے

- جب تینون خطوط متوازی ہونگی تو مساواتین یو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ کی یہہ صورتین ہونگین

ا لا + ب د + س۱ = ۰

ا لا + ب د + س۲ = ۰

ا لا + ب د + س۳ = ۰

اور مساوات (۱) کی اس صورت مین تحویل ہوگی کہ

$$ا لا + ب د + \frac{ل س_۱ + م س_۲ + ن س_۳}{ل + م + ن} = ۰$$

اور یہہ مساوات اوس خط کو تعبیر کرتی ہی جو متوازی خطوط معلومہ کے ہون

پس اگر تینون خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہین یا تینون خطوط متوازی ہون تو اوس صورت مین مساوات (۱) ہر ایک خط کو نہین تعبیر کر سکتی اسواسطے کہ اول صورت مین اس مساوات سے فقط وہ خط تعبیر ہوگا جو اوس نقطہ پر گذرتا ہی اور دوسری صورت مین وہ خط تعبیر ہوگا جو متوازی خطوط معلومہ کا ہی پس یہی صرف دو صورتین مستثنی ہین اور کوئی اور صورت مستثنی نہین - اسواسطے کہ صرف ایک صورت ہی جسمین اکثریہ قاعدہ ٹوٹتا ہی یعنی جب مح و حح و می سب فنا ہوتی ہین یعنی جب

و۱ می۲ − مو۲ می۱ = ۰
می۱ مو۲ − می۲ مو۱ = ۰ . . . . (۲)
مو۱ مو۲ − مو۲ مو۱ = ۰

اب ہم ثابت کرینگے کہ جب مساوات (۲) کی شرائط پوری ہونگیں تو تینون خطوط ایک نقطہ پر ملینگے یا متوازی ہونگے

اول فرض کرو کہ (لا۱ و ک۱) اور (لا۲ و ک۲) ایسے نقطے ہین جو ان خطوط مین سے کسی ایک خط مین بہی نہین ہین پس کوئی ان مقادیر مو۱ و می۱ و مو۲ و می۲ مین سے فنا نہین ہوگی (۲) کی مساواتون مین سے اول سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ مو۱/مو۲ = می۱/می۲ پس اس سے ثابت ہوتا ہی کہ مو جب دفعہ ۲۷ کے نسبت عمودون کی نقطہ (لا۱ و ک۱) اور (لا۲ و ک۲) سے خط مو = ۰ پر وہی نسبت رکہتی ہین جو عمود انہین نقطون سے خط می = ۰ پر آپسمین رکہتی ہین پس موافق علم ہندسہ کے یہہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہی کہ خطوط مو = ۰ اور می = ۰ دونو متوازی ایک خط کے ہین جو نقاط (لا۱ و ک۱) و (لا۲ و ک۲) مین ملایا جاے یا یہہ تینون خطوط ایک نقطہ پر ملتے ہین اور متماثل یہی نتیجے اور بہی نتایج (۲) کے مساواتون مین سے دوم اور سوم سے نکلتی ہین اس سے ثابت ہوتا ہی کہ اس صورت مین جب مساوات (۲) کی شرائط پوری ہوتی ہین تو تینون خطوط کیا تو ایک نقطہ پر ملینگے یا متوازی ہونگے

دوم فرض کرو کہ دو نقاط معلومہ مین سے ایک نقطہ تین خطوط مین سے کسی ایک خط پر واقع ہی مثلاً خط می = ۰ پر تو (۲) کی مساواتون مین سے اول سے یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ کیا تو مو۱ = ۰ یا می۲ = ۰
اول فرض کرو کہ مو۱ = ۰ تو (۲) کے دوم اور سوم کی مساواتون سے ہم استنباط کرتے ہین کہ کیا مو۱ = ۰ یا می۲ = ۰ یا مو۲ = ۰ اول صورت مین تینون خط نقطہ (لا۱ و ک۱) پر گذرتی ہین اور دوسری صورت مین خطوط مو = ۰ اور می = ۰ دونو نقاط (لا۱ و ک۱) اور (لا۲ و ک۲) پر گذرتے ہین یعنی خطوط معلومہ مین سے دو خط منطبق ایک دوسرے پر ہوتے ہین اس طرح سے تینون خط کے کیا تو دو خطوط استقاطع ہو جائنگے یا دو خطوط متوازی ہو جاینگے۔ فرض کرو کہ ہم می۲ = ۰ کے ساتہہ می۲ = ۰ کے قرار دیتے مین تو خط می = ۰ نقاط معلومہ (لا۱ و ک۱) اور (لا۲ و ک۲) مین گذرتے ہین اور (۲) کی تیسری مساوات سے

ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی

$$\frac{لو_1}{لو_2} = \frac{مو_1}{مو_2}$$

پس اسطرح خطوط لو = ۰ اور مو = ۰ کیا تو خط سے جو نقاط (لا، ی۱) اور (لا، ی۲) مین ملایا جاے ملتے ہین یا متوازی اوس خط کی ہین یعنی خطوط لو = ۰ و مو = ۰ و ی = ۰ ایک نقطہ پر ملتے ہین یا متوازی ہین

(۷۰) فرض کرو کہ ھ = ۰ اور ب = ۰ مساواتین دو خطون کی ہون اور دو طرح کی رقمون مین بیان ہوئی ہون ایک اون عمودون کے جو مبدا سے نکالین اور دوسرے اونکی میلان کی جو محور لا کے ساتھہ ہو (دفعہ ۵۰ دیکھو) اسکی یہہ معنی ہین کہ مساوات لا جم ب + ی جب ب − ع ا کا اختصار ھ ہے اور مساوات لا جم ب + ی جب ب − ع ۲ کا اختصار ب ہی ہو تو ہم بتلاینگے کہ مساواتون

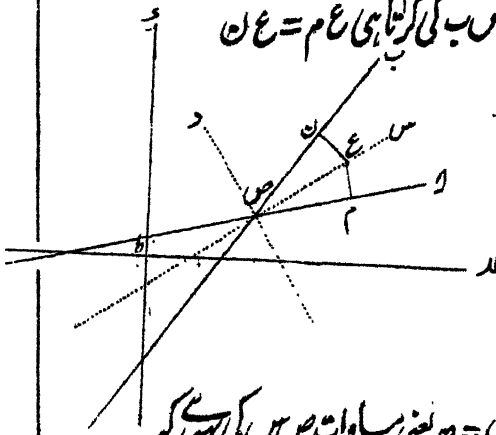
ھ − ب = ۰ اور ھ + ب = ۰ کے کیا معنی ہین

فرض کرو کہ ص ا خط ھ = ۰ ہو

ص ب خط ب = ۰ ہو

اور ص س زاویہ ا ص ب کی تنصیف کرتا ہی اور ص د تکملہ ا ص ب کی تنصیف کرتا ہی تو زاویہ د ص س قائمہ ہوگا اور ص س مین کوئی نقطہ ع کا لیکر ع م اور ع ن عمود ا ص اور ص ب پر نکالو اگر لا اور ی محددین نقطہ ع کے ہون تو طول ع م کا ھ بموجب دفعہ ۵۴ کے ہی اور طول ع ن کا ب ہی چونکہ ص س تنصیف زاویہ ا ص ب کی کرتا ہی ع م = ع ن

اسواسطے ص س مین ہر نقطہ کے واسطے ب = ھ یعنی مساوات ص س کی یہہ ہے کہ

ھ = ب

علی ہذا القیاس مساوات ص د کی یہہ ہے کہ

ھ = − ب

پس هه - ب = ۰ اور هه + ب = ۰ اون خطون کو تعبیر کرتے ہین جو نقطہ تقاطع
هه = ۰ اور ب = ۰ مین گذرتا ہی اور اونکی زاویہ درمیانی کی تنصیف کرتا ہین

(۷۱) طالب علم کو چاہئے کہ وہ ان خطوط هه + ب = ۰ اور هه - ب = ۰ کے درمیان تمیز کرے اس تمیز کرنیکے لیے قاعدہ ذیل استعمال مین آسکتا ہی کہ دو خط هه = ۰ اور ب = ۰ سطح کو جسمین وہ واقع ہین چار خانون مین تقسیم کرتے اب یہہ دریافت کرنا چاہئے کہ محددین کا مبدا کس خانہ مین واقع ہی هه - ب = ۰ اوس زاویہ کی تنصیف کرتا ہی جو درمیان هه = ۰ اور ب = ۰ کے واقع ہی اور اوسمین مبدا محددین کا واقع ہی - یہہ دفعہ بالا کی تحقیقات مین سے اور دفعات ۵۵ و ۵۶ سے بدیہی ہے

مساوات هه + مح ب = ۰ ایک خط کو تعبیر کرتا ہی اسطرح سی کہ مح تعداد اگر برابر اون دو عمودون کی نسبت کی ہی جنمین سے ایک عمود خط کے کسی نقطہ سے خط هه = ۰ پر نکالین اور دوسرا عمود اوسی نقطہ سے ب = ۰ پر نکالین - اگر مح مثبت ہی تو خط هه + مح ب = ۰ چار خانون مین سے اونہین دو خانون مین واقع ہوتا ہے جنکی طرف ابھی اشارہ ہوا ہے کہ جنمین خط هه + ب = ۰ کے واقع ہے اگر مح منفی ہے تو خط هه + مح ب = ۰ کے چار خانون مین سے اون دو خانون مین واقع ہی جنمین هه - ب = ۰ واقع ہی دفعہ ۷ کی شکل مین ہم دیکھتے ہین کہ ع م = ع ص جب ع ص م اور ع ن = ع ص جب ع ص ن اس سے معلوم ہوا کہ مح یا $\frac{\text{ع م}}{\text{ع ن}} = \frac{\text{جب ع ص م}}{\text{جب ع ص ن}}$ یعنی مح اوس نسبت کو بیان کرتا ہی جو جیب زاویہ درمیانی هه = ۰ اور هه + مح ب = ۰ کی جیب زاویہ درمیانی ب = ۰ اور هه + مح ب = ۰ سے نسبت رکہتی ہی

(۷۲) جب خط کی مساوات لا جم هه + ی جب هه - ع = ۰ تو ہی ہم بدستور مساوات خط مستقیم کو اختصاراً هه = ۰ سے تعبیر کرینگے اور جب ہم اس صورت کے مقید نرہینگے تو یہہ طریقہ کتابت ارقام کا کلام مین لائینگے کہ لو = ۰ و مو = ۰ و نو = ۰ . . . . . .
فرض کرو کہ لو = ۰ اور مو = ۰ مساواتین دو خطون کی ہون خواہ محور قائم الزاویہ ہون خواہ منحرف تو لو - مح مو = ۰ اور لو + مح مو = ۰ دو خطوط کو تعبیر کرینگے جو اون دو نقطوں کے نقطہ

تقاطع پر گذرینگے — فرض کرو کہ دفعہ ۷ مین ص ا اور ص ب اول دو خطوط مستقیم ہین اور ص س اور ص د دوم دو خطوط مستقیم ہین تو

$$\frac{\text{جب س ص ا}}{\text{جب س ص ب}} = \frac{\text{جب د ص ا}}{\text{جب د ص ب}}$$

اسواسطے بموجب دفعہ ۷ ۵ کے ظاہر ہوتا ہی کہ اگر ع عمود نقطہ (لا و ی) سے خط لو = ۰ پر ہو تو ع = حج لو جسمین حج مقدار مستقل ہے اور علی ہذا القیاس اگر عَ عمود اوسی نقطہ سے مو = ۰ پر نکالا جاے تو عَ = حجَ مو جسمین حجَ ایک مقدار مستقل ہے — اسسے ثابت ہوا کہ

او — حج مو = ۰ یا $\frac{\text{ع}}{\text{حج}} - \frac{\text{مح عَ}}{\text{حجَ}} = ۰$ سے معلوم ہوتا ہی کہ $\frac{\text{ع}}{\text{عَ}} = \frac{\text{مح حج}}{\text{حجَ}}$

پس باعتبار تعداد کے بغیر لحاظ علامت جبریہ کے

$$\frac{\text{جب س ص ا}}{\text{جب س ص ب}} = \frac{\text{مح حج}}{\text{حجَ}}$$

علی ہذا القیاس

$$\frac{\text{جب د ص ا}}{\text{جب د ص ب}} = \frac{\text{مح حج}}{\text{حجَ}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{جب س ص ا}}{\text{جب س ص ب}} = \frac{\text{جب د ص ا}}{\text{جب د ص ب}}$$

(۳۷) دفعات گذشتہ کے اصول کو ہم بعض مثالون مین کام کے اندر لاتے ہین فرض کرو کہ ھ = ۰ اور ب = ۰ اور ں = ۰ مساواتین تین خطون کی ہون جو آپسمین ملکر ایک مثلث بناتی ہون اور فرض کرو کہ مبدء مثلث کے اندر ہی تو مساواتین خطون کی جو اندر کے زاویون کی تنصیف کرتی ہین بموجب دفعہ ۷ کی یہہ ہونگین

ب — ں = ۰ (۱) ں — ھ = ۰ (۲) اور ھ — ب = ۰ (۳)

یہہ تینون خط ایک نقطہ ملتے ہین اسواسطے یہہ بات ظاہر ہی کہ جو قیمتین لا اور ی کی معاً مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط کو پورا کرتی ہین وہ (۳) کے شرائط کو بھی پورا کرتی ہین

اب پھر مساواتین تین خطون کی جو مثلث کے زاویون مین سے گذرتی ہین مثلث کے زاویون کے تکملے زاویون کی تنصیف کرتے ہین تو اونکی مساواتین یہہ ہونگین

ب + ں = ۰ (۴) ں + ھ = ۰ (۵) ھ + ب = ۰ (۶)

یہہ بدیہی ہے کہ (۳) (۴) (۵) ایک نقطہ پر ملتے ہین اور علی ہذا القیاس (۵) (۶) (۱)

ایک نقطہ پر ملتے ہین اور علی ہذا القیاس (۳) (۶) (۲) ایک نقطہ پر ملتے ہین
اس قبیل کی تمام دعوون مین مبدء کو مثلث کے اندر سمجھنا چاہئے بشرطیکہ اوسکی خلاف نہ بیان کیا گیا ہو
(۴۷) اگر ھ = ۰ اور ب = ۰ اور س = ۰ مساواتین تین خطون کے ہون جس سے کہ مثلث بنا ہی
تو ہر ایک خط اس مساوات سے تعبیر ہوگا کہ ل ھ + م ب + ن س = ۰ اور جو مستثنی صورتین
دفعہ ۱۶ مین بیان کین ہین وہ یہان نہین واقع ہونگین
فرض کرو کہ طا و طب و طس طول اضلاع مثلث کو تعبیر کرتے ہین اور یہہ ضلع خطوط ھ = ۰ اور
ب = ۰ اور س = ۰ کے حصے ہونگے کوئی نقطہ مثلث کے اندر مقرر کرو اور اوسمین اور مثلث کے
کونون کے نقطون مین خطوط وصل کرو تو تین مثلث پیدا ہونگی جنکے رقبے یہہ ہونگے

- طا ھ/۲ و - طب ب/۲ و - طس س/۲ اس سے ثابت ہوا کہ

طا ھ + طب ب - طس س = ایک مقدار مستقل کے

درحقیقت مستقل مقدار رقبہ مثلث سے جو منفی لیا جاے دو چند ہے
اسنے یہہ ظاہر ہے کہ مثلث کے اندر کوئی سا نقطہ ھ = ۰ اور ب = ۰ اور س = ۰
کے موافق مقرر کیا جاے اوسکے واسطے نتیجہ مذکور ثابت ہی
اور اگر مختلف صورتون کا امتحان کرین تو ثابت ہوگا کہ یہی نتیجہ اوس نقطہ کے واسطے بھی ہے
جو مثلث سے باہر واقع ہو ثابت ہی - اس سے ثابت ہوا کہ علی العموم یہہ نتیجہ ثابت ہی
فرض کرو کہ ہم مساوات ایک خط کی جو متوازی اس خط ل ھ + م ب + ن س = ۰ کا ہو
دریافت کرنا چاہتے ہین تو یہہ مساوات مطلوب اسطرح لکھی جائیگی

ل ھ + م ب + ن س + ق = ۰

یہان بموجب دفعہ ۳۸ کے ق مقدار مستقل ہے
یا اس سبب سے کہ طا ھ + طب ب + طس س مقدار مستقل ہے تو مساوات مطلوب اسطرح لکھی
جا سکتی ہے کہ ل ھ + م ب + ن س + قَ (طا ھ + طب ب + طس س) = ۰
جسمین قَ ایک مقدار مستقل ہے
(۴۸) خطوط جو مساواتون ی = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ سے تعبیر ہوتی ہین ایک نقطہ پر ملینگی

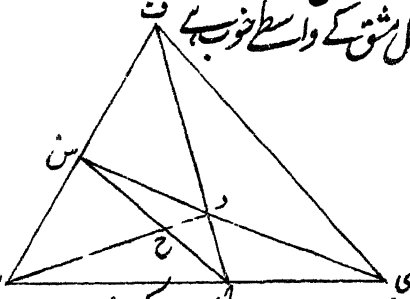
بشرطیکہ ل یو + م مو + ن می = ۰ ایک مطابقہ ہو اور ل و م و ن مقادیر مستقل ہون اسواسطے اگر ل یو + م مو + ن می = ۰ مطابقہ ہین تو اوسسے ہم کو ہمیشہ یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

می = − (ل یو + م مو) / ن

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات می = ۰ اسطرح لکھی جاتی ہے کہ

(ل مو + م می) / ن =

یعنی خط می = ۰ ایک خط ہی جو نقطہ تقاطع یو = ۰ اور مو = ۰ سے گذرتا ہے

(۷۶) اس باب مین یہہ مثال مشق کے واسطے خوب ہے

فرض کرو کہ ا ب س د ایک ذوار بعۃ الاضلاع ہی وتر اس اور ب د کہینچو ا ب اور س د کو بڑہا کر نقطہ ی پر ملاؤ اور ب س اور ا د کو خارج کر کے نقطہ ف پر ملاؤ اور ی ف وصل کرو اسکو تیسرا وتر ذوار بعۃ الاضلاع کا کہتے ہین فرض کرو کہ

یو = ۰ مساوات ا ب کی . . . . . (۱)

مو = ۰ مساوات ب س کی . . . . . (۲)

می = ۰ مساوات س د کی . . . . . (۳)

اب ہم شکل کی اور خطوط کی مساواتین ارقام یو و مو و می مین اور مقادیر مستقل مین تعبیر کر سکتے ہین — فرض کرو کہ مساوات ا د کی

ل یو − م مو = ۰ . . . . . . . . (۴)

اور مساوات س ا کی واسطے

م مو − ن می = ۰ . . . . . . (۵)

یہہ فرض کرنا خلاف قاعدہ نہین ہے اسواسطے کہ مساوات (۴) کسی خط کو تعبیر کرتی ہے

جو نقطہ ب پر گذرتا ہی خواہ کچہہ ہی قیمت ل اور م کی ہو اور ان مستقل مقادیر کے مناسب قیمتین ہی
مقرر کرنے سے (۴) کو ت ذ سے تعبیر کر سکتے ہین اور نیز مساوات (۵) اگر ہم ... کو تعبیر کرتی ہی
جو نقطہ س پر گذری اور ن کی قیمت مناسب مقرر کرنے سے ہم اوس سے ... کو تعبیر کر سکتے ہین
اگر ہم چاہین تو ان تین مقادیر مستقل ل و م و ن مین سے ایک کو واحد سے تعبیر کرین لیکن یہہ امر
خلاف قرینہ ہی اسلیئے ہم اوسکو نہین اختیار کرینگے مساوات ا د کی یہہ ہے کہ

ل یو − م مو + ن می = ۰ . . . (۶)

اسواسطے کہ (۶) تعبیر اوس خط کو کرتا ہی جو ل یو − م مو = ۰ اور می = ۰ کے نقطہ
تقاطع پر گذرتا ہی یعنی ایک خط جو نقطہ د پر گذرتا ہی اور نیز (۶) اوس خط کو بہی تعبیر کرتا ہے
جو نقطہ تقاطع یو = ۰ اور م مو − ن می = ۰ کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہی یعنی ایک خط کو
جو نقطہ ا پر گذرتا ہی اسسے ثابت ہوا کہ ا د (۶) سے تعبیر ہوتا ہی ـ مساوات ی ف کی
یہہ ہے کہ

ل یو + ن مو = ۰ (۷)

اسواسطے کہ (۷) خط کو تعبیر کرتی ہی کہ نقطہ ی پر گذرتا ہی اور چونکہ ل یو + ن می =
ل یو − م مو + ن می + م مو تو کسی خط کو جو نقطہ ف پر گذرتا ہی (۷) تعبیر کرتی ہے
اسسے ثابت ہوا کہ خط ی ف کو (۷) تعبیر کرتا ہے

فرض کرو کہ ح نقطہ تقاطع ا س اور ب د کا ہی تو مساوات ی ح یہہ ہے کہ

ل یو − ن می = ۰ (۸)

اسواسطے (۸) تعبیر کرتا ہی خط کو جو تقاطع (۱) اور (۳) پر گذرتا ہی اور نیز نقطہ تقاطع
(۴) اور (۵) پر تو مساوات ف ح یہہ ہے کہ

ل یو − ۲ م مو + ن می = ۰ (۹)

اسواسطے (۹) تعبیر کرتا ہی ایک خط کو جو نقطہ تقاطع (۴) اور (۵) پر گذرتا ہی اور نیز
(۲) اور (۶) کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہی

فرض کرو کہ ب د خارج کیا گیا ہی ف سے نقطہ ہ پر ملتا ہی اور اس اور ب ف خارج شدہ نقطہ ک پر ملتے ہین تو یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ مساوات اد کی

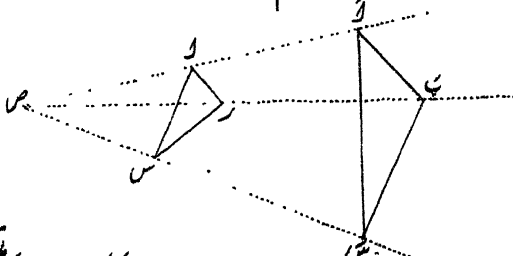
۳ ل یو ـ م مو + ن می = ۰

مساوات س ہ کی یہہ ہے　　م مو + ن می = ۰

ک ب کی ہے　　ل یو + م مو = ۰

ک د کی　　ل یو ـ م مو + ۲ ن می = ۰

اس مثال کو ہمنے اس خیال سے لکہا ہی کہ طالب علمون کو خطون کی مساواتین بنانیکی مشق ہو جاوے ورنہ اوسمین کوئی بڑی بات نہین ہے ــ اب ہم ایک دو مثال لکہتے ہین

(۷۷) اگر دو مثلث ایسی ہون کہ انکی نظیر کے زاویون مین خطوط وصل کئی گئی ایک نقطہ پر ملتے ہون تو اضلاع نظیرہ کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم مین واقع ہونگے

فرض کرو کہ ا ب س ایک مثلث اور اَ بَ سَ دوسرا مثلث ہی اور ص وہ نقطہ ہی جسپر خطوط ا اَ و ب بَ و س سَ ملتے ہین اور فرض کرو کہ مساوات س ا کی یو = ۰ اور ا س کی مو = ۰ اور ا ب کی می = ۰ اور فرض کرو کہ بَ سَ کے واسطے یہہ مساوات ہی

لَ یو + م مو + ن می = ۰　　(۱)

اور سَ اَ کی　　ل یو + مَ مو + ن می = ۰　　(۲)

دفعہ ۶۹ مین ثابت کیا گیا ہی کہ مساوات بَ سَ کی اوپر کی صورت مین لکہی جا سکتی ہی اور دفعہ بالا کے طریقہ پر چلنے سے ثابت ہو سکتا ہی کہ مقادیر مستقل ل اور مَ کی مناسب قیمتون کے مقرر کرنے سے (۲) کو سَ اَ سے تعبیر کر سکتے ہین اب ہم ثابت کرینگے کہ مساوات اَ بَ کی اس صورت مین لکہی جا سکتی ہی کہ

ل یو + م مو + نَ می = ۰　　(۳)

مستقل نَ بظاہر ایسا معین ہو سکتا ہی کہ خط جو (۳) سے تعبیر ہو اَ پر گذرے فرض کرو نَ ایسا معین ہو گیا تو اب یہہ ثابت کرنا رہا کہ خط (۳) بَ پر گذریگا (۱) اور (۲)

سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ مساوات (لَ-ل) لو + (م-مَ) مو = ۰ (۴)
کسی خط کو تعبیر کرتی ہے جو نقطہ س پر گذرتا ہے
لیکن (۴) ظاہرا تعبیر اوس خط کو کرتی ہے جو نقطہ تقاطع ب س اور سَ اَ پر گذرتا ہے
اسے معلوم ہوا کہ (۴) مساوات س سَ کی ہے
اور خط جو (۳) سے تعبیر ہو بموجب فرض کے نقطہ اَ پر گذرتا ہی پس (۲) اور (۳) سے
یہہ حاصل ہوتا ہے کہ (مَ - م) مو + (ن - نَ) می = ۰ (۵) یہہ مساوات اا کی ہی
یہہ مساوات (ل - لَ) لو + (ن - نَ) می = ۰ (۶) ایک خط کو تعبیر کرتی ہی
جو ب س اور اب کے تقاطع پر گذرتا ہی یعنی نقطہ ب پر اور (۴) و (۵) سے یہہ استخراج ہوتا ہے
کہ یہہ خط س سَ اور ا اَ کے نقطہ تقاطع پر بہی گذرتا ہی یعنی نقطہ ص پر اسے معلوم ہوا کہ (۶)
مساوات ص ب کی ہے
اب (۱) اور (۳) سے یہہ نکلتا ہی کہ خطوط جو ان مساواتون سے تعبیر ہوتے ہین خط (۶) پر ملتے ہین
اسے معلوم ہوا کہ (۳) مساوات اَ بَ کی ہے
پس دعوی مطلوب ہمارا آسانی سے ثابت ہوتا ہی کہ خط جو اس مساوات

ل لو + م مو + ن می = ۰ (۷) سے تعبیر ہوتا ہی
ب س اور بَ سَ کے اور س ا اور سَ اَ کے اور اب اور اَ بَ کے نقطہ تقاطع پر سے
گذرتا ہی یعنی یہہ تینون نقطے تقاطع کے ایک خط مستقیم مین ہین
بالعکس اسکے اگر دو مثلث ایسی ہون کہ اضلاع نظیرہ کے نقاط تقاطع ایک خط مستقیم مین
ہون تو زوایا نظیرہ مین خطوط وصل کی گئی ایک نقطہ پر ملینگے - اس دعوی کا اثبات
خطوط ب س و س ا و اب و بَ سَ و سَ اَ سے اوسیطرح شروع کرین جس طرح
اوپر لکہا ہی اور (۳) کو فرض کرین کہ وہ مساوات ایک خط کی ہی جو اَ پر گذرے
تو (۷) اوس خط کو تعبیر کریگا جو نقطہ تقاطع ب س اور بَ سَ پر اور سَ اَ اور
سَ اَ پر گذرتا ہے اب (۳) مساوات اوس خط کی ہے جو اب اور (۷) کے تقاطع میں

گذرتا ہی اسے معلوم ہوا کہ (۳) مساوات اَبَ کی ہے پس صورت (۱) (۲) (۳) سی یہہ نکلتا ہی کہ سَ سَ نقطہ تقاطع ااَ اور ب بَ پر گذرتا ہی

یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ مساوات خط کی جو تقاطع اب اور اَسَ پر اور اس اور اَبَ سَ گذرتا ہے یہہ ہی کہ ل لو + مَ مو + نَ می = ۰ (۸)

اور تقاطع (۸) کا ب س کے ساتہہ اس خط

لَ یو + مَ مو + نَ می = ۰ (۹) پر واقع ہوگا

اور علی ہذا القیاس خط جو نقطہ تقاطع ب ا اور بَ سَ اور نقطہ تقاطع ب س اور بَ اَ مین وصل کیا جاے س اسے (۹) پر ملیگا اور نیز خط جو تقاطع س ا اور سَ اَبَ اور تقاطع س ب اور سَ اَ مین ملایا جاے اب سے (۹) پر ملیگا

(۷۸) مساوات لو + مح مو = ۰ ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہی جو خطوط لو = ۰ اور مو = ۰ کے تقاطع پر گذرتا ہی پس اسے معلوم ہوا کہ اگر ایک خطون کا سلسلہ ہو اور اون سبکی مساواتونکی یہہ صورت ہو کہ یو + مح مو = ۰ اور فقط فرق مستقل مح کی قیمتون مین ہو تو تمام یہہ خطوط نقطہ تقاطع لو = ۰ اور مو = ۰ پر گذرینگی

## مثالین

(۱) مساوات خط کی دریافت کرو جو مبدء مین گذرتا ہی اوران خطون کو تقاطع کرتا ہی کہ

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ی}{ب} = ۱ \quad اور \quad \frac{لا}{اَ} + \frac{ی}{بَ} = ۱$$

(۲) محور لا پر دو نقطے ا اور اَ اور محور ی پر دو نقطے ب اور بَ ایک بعد معلوم پر مبدء سے ہین اور اَب اور اَبَ نقطہ ع پر تقاطع کرتے ہین اور اَبَ اور اَب نقطہ ق پر تو مساوات خط ع ق کی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ محور اوس خط سے نسبت موسیقی مین تقسیم ہوتا ہے

(۳) اگر ھ = ۰ اور ب = ۰ اور سا = ۰ مساواتین مثلث اب س کے زاویون ا و ب و س کے متقابل اضلاع کی ہین تو ثابت کرو کہ ھ جب ا - ب جب ب = ۰ مساوات خط مستقیم کی ہے جو اب کو نقطہ س پر تنصیف کرتا ہے

(۴) ایسی مساواتون کے ذریعہ سے جو پہلے سوال مین بیان ہوئی ہین پہلا دعوی دفعہ ۶۴ کا ثابت کرو

(۵) ثابت کرو کہ ھ جم ا – ب جم ب = ۰ مساوات عمود کی نقطہ س سے اب پر ہے

(۶) اسے دوسرا دعوی دفعہ ۶۴ کا ثابت کرو

(۷) اگر مثلث اب س کی زاویون اوب وس کی متقابل کے اضلاع کا طول طا و طب و طس ہو تو ثابت کرو کہ

ھ جم ا – ب جم ب + طس/۲ (جب ب جم ا – جب ا جم ب) = ۰ سکی ہی ہر

مساوات اوس خط کی ہی جو اب کی تنصیف کرتا ہی اور اوسپر عمود ہی اور یہہ مساوات اسطرح بہی لکہا جا

(ھ + طا جب ب جب س / ۲ جب ا) جم ا – (ب + طب جب س جب ا / ۲ جب ب) جم ب = ۰

(۸) اسے تیسرا دعوی دفعہ ۶۴ کا ثابت کرو

(۹) مساوات طا ھ طب ب = ۰ کی معنی بیان کرو

(۱۰) ثابت کرو کہ طا ھ + طب ب طس س = ۰ مساوات اوس خط کی ہی جو نقاط وسط

اس اور ب س مین ملائین

(۱۱) اسے ب س پر اور ب سے اس پر عمود نکالے گئے ہین تو ثابت کرو کہ جو ان عمودون کے موقعون کو

خط وصل کیا جایگا اوسکی مساوات ھ جم ا + ب جم ب – س جم س = ۰ ہوگی

(۱۲) اگر ایک مثلث کے داخلی اور خارجی زاویے خطوط سے تنصیف کئے جائین تو یہہ خطوط صرف

چار نقاط پر علاوہ مثلث کے زاویون کے ملینگے

(۱۳) اگر لو = ۰ اور مو = ۰ اور ی = ۰ مساواتین تین خطوط مستقیم کی ہون تو مساوات

اوس خط کی دریافت کرو جو دو نقطون پر گذرے لی/ل = می/م = نی/ن اور لی/ل = می/م = نی/ن

(۱۴) مساوات خط مستقیم کی دریافت کرو جو ان خطوط مین سے دو دو کی نقطہ تقاطع پر گذرے

۲ا لو + ب مو + س می = ۰ ب مو – س می = ۰

اور ۲ب لو + ا مو + س می = ۰ ا مو – س می = ۰

(۱۵) اگر ھ = ۰ اور ب = ۰ اور س = ۰ مساواتین اضلاع مثلث اب س کی ہون تو

ثابت کرو کہ مثلث کے دائرہ اندرونی اور بیرونی کے مرکزون میں جو خط وصل کیا جاتا ہی اوسکی

مساوات یہہ ہوگی کہ

مہ (جم ب - جم س) + ب (جم س - جم ا) + س (جم ا - جم ب) = ۰

(۱۶) اگر اضلاع مثلث کی یہہ مساواتین ہون کہ لو = ۰ اور سو = ۰ اور می = ۰ اور اضلاع مثلث ا ب س کی لو = طا د سو = طب و می = طس تو ا ا و ب ب و س س ایک نقطہ پر ملینگے

(۱۷) اگر خطوط ا ا و ب ب و س س آخر مثال مین اضلاع مثلث ا ب س سے نقاط د و ی و ف پر ملین تو ثابت کرو کہ نقاط تقاطع دی اور ا ب کی اور ی ف اور ب س کے اور ف د اور س ا کے سب ایک خط مستقیم مین واقع ہونگی اور یہی خاصیت اون نقاط تقاطع مین ہوگی جو اضلاع مثلث ا ب س سے ملین

(۱۸) دفعہ ۶۷ مین فرض کرو کہ خط جو ف اور ح مین ملایا جائے وہ ا ب سے نقطہ ع پر اور س د سے نقطہ ق پر ملتا ہے تو مساواتین س ع اور د ع اور ا ق اور ب ق کی موافق طریقہ کتابت ارقام دفعہ مذکور دریافت کرو

(۱۹) مثلث کے اضلاع کے نقاط وسط سے عمود اونپر نکالے گئے ہین اور سبکے سب کیا تو اندر ہین یا سارے کے سارے باہر مثلث کے اور اضلاع مثلث کی متناسب ہین تو ثابت کرو کہ اگر ان عمودوں کے اطراف اور مثلث کے مقابل کے زاویون مین خطوط مستقیم وصل کئے جائین تو وہ ایک نقطہ پر ملینگے

(۲۰) فرض کرو کہ ذواربعۃ الاضلاع کے تین وتر خارج ہوکر ایک دوسرے سے تین نقطون پر ملتے ہین اور ہر نقطہ اور ذواربعۃ الاضلاع کے مقابل کے دو کونون مین خطوط وصل کئے جائین تو ایسے چھہ خط ہین کہ تین تین آپسمین چار نقطون پر ملینگے

(۲۱) مثال گذشتہ مین جو شکل بنائی جائے اور اوسمین جو چار خطوط ذواربعۃ الاضلاع کے ایک کونہ کو ملائی جائین اونمین یہہ علاقہ ہوگا کہ دونو اونمین سے متوازی اضلاع مثلث کی ہونگے اور دو اونمین سے کسی متوازی الاضلاع کے دو قطرون کے متوازی ہونگے

(۲۲) ثابت کرو کہ منتصفین تقاطع کے جو سوالات (۴) و (۶) و (۸) مین دریافت ہوئی اوس خط مستقیم

مین واقع ہوتے ہین جنکی مساوات یہہ ہے کہ

صہ جب اجم اجب (ب - س) + جا جب ب جم ب جب (س - ۱) + س جا جب س جم س اجب (ا - ب) = ۰

(۲۳) سطح مستوی مثلث ا ب س مین کوئی نقطہ ع مقرر کرکے کونون کی نقاط ا و ب و س سے خطوط اوس نقطہ تک کہینچو اور اونکو خارج کرو کہ مقابل کے اضلاع کو یا اضلاع ممدودہ کو نقاط اَ و بَ و سَ پر تقاطع کرین اور فرض کرو کہ ب س اور بَ سَ خارج ہوکر نقطہ اَ پر اور س ا اور سَ اَ پر نقطہ بَ پر اور ا ب و اَ بَ نقطہ سَ پر ملتے ہین تو ثابت کرو نقاط اَ و بَ و سَ ایک خط مستقیم مین ہونگے اور یہہ بہی ثابت کرو کہ خطوط مستقیم ب بَ اور س سَ اور ا اَ ایک نقطہ پر ملتی ہین اور اس س سَ اور ا اَ اور ب بَ بہی اور ا اَ و ب بَ و س سَ بہی

(۲۴) تین نقطے اَ و بَ و سَ مثلث کے اضلاع ب س و س ا و ا ب مین ہین اور اونمین خطوط ملائی گئی ہین اور مثلث بناتی ہین جنکی کوئی سے دو ضلعے برابر زاویے مثلث اول کے اون اضلاع پر بناتی ہین جنسے کہ وہ ملتی ہین تو ثابت کرو کہ ا اَ و ب بَ و س سَ عمود ب س و س ا و ا ب پر ہین

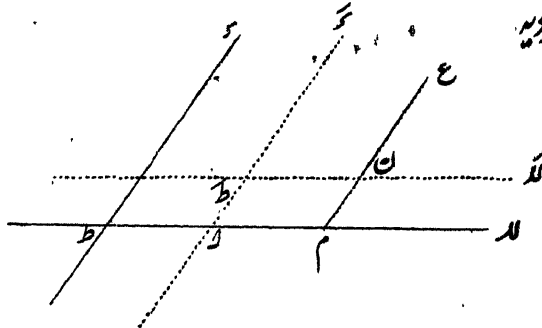
(۲۵) ا ب س ایک مثلث ہی اور ط مرکز دائرہ اندرونی مثلث کا ہی اور طَ مرکز دائرہ خارجی مثلث کا جو ب س کو مس کرتا ہی اور خط ط طَ کا ب س سے نقطہ د پر ملتا ہی اور ایک خط نقطہ د سی کہینچا گیا اس سے نقطہ ی پر اور ا ب سے نقطہ ف پر ملتا ہی اور خطوط ط ف اور طَ ی تقاطع پر اور خطوط ط ی اور طَ ف نقطہ ق پر ملتے ہین تو ثابت کرو کہ ا و ع و ق ایک خط مستقیم مین واقع ہوتے ہین جو عمود ط طَ پر ہے

## باب پنجم

### محددین کی تبدیل ہیئت

(۷۹) ہم اوپر کی دفعات مین بیان کر آئی ہین کہ تمام مساوات خط مستقیم کی اس صورت کی ہوتی ہی کہ ی = م لا + س لیکن یہہ صورت نہایت ساوی اور آسان بعض صور تونمین ہوجاتی ہے مثلاً اگر مبدا خط پر ہو تو مساوات یہہ ہوجاگی کہ ی = م لا اور اگر محور منطبق خط پر ہو تو ی = ۰ اور علی ہذا القیاس مساوات کسی خط منحنی کی نہایت مختصر اور سیدہی سادی موافق

مقامات مبدء اور سمت محور کی ہوجاتی ہے اسواسطے آسانی کے واسطے اس باب مین ایسے مقدمات داخل کرتے ہین کہ جنکی اعانت سے یہہ بات حاصل ہوجائیگی کہ جب محدودین ایک نقطہ کے بلحاظ ایک مبدء اور محورون کے معلوم ہون توہم اوسی نقطہ کے محدّدین بلحاظ دوسرے معلوم مبدء اور محورونکے دریافت کرلین اور یہہ مقدمات ایسے ہین کہ باب اول کے اخر مین بہی لکہے جاسکتے تہے اسلئے کہ کوئی نتیجہ اونمین باب اول سے آگے کے بابون کا کام مین نہین آیا

(۸۰) محدّدین کے مبدء کا مقام بغیر اسکے کہ مقام محورون کا تبدیل ہو بدل دو اور محور خواہ قائم الزاویہ ہون خواہ غیر قائم الزاویہ

فرض کرو کہ ط لا اور ط ء اصل محور ہون اور ط َ لا َ و ط َ ء َ ایسے جدید محور ہون کہ ط َ لا َ متوازی ط لا کا اور ط َ ء َ متوازی ط ء کا ہو اور ط َ کے محدّدین ح اور ق بلحاظ ط کے ہون اور ع ایک نقطہ ہو جسکے محدّدین بلحاظ قدیم پہلے محورونکے لا و ء ہون اور بلحاظ جدید محورونکے لا َ و ء َ ہون فرض کرو کہ ء َ ط َ خارج ہوتے ہی ط لا کو نقطہ ا پر قطع کرتا ہی اور ع م متوازی ط ء کا ہی جو ط َ لا َ سے نقطہ ن پر ملتا ہے تو

ط ا = ح اور ا ط َ = ق

لا = ط م = ا م + ط ا = ط َ ن + ط ا = لا َ + ح

ء = ع م = ع ن + ن م = ع ن + ا ط َ = ء َ + ق

پس اسطرح قدیم محدّدین جدید محدّدین کے رقمون مین بیان ہوگئی

(۸۱) سمتین محورون کی بدل دو اور مبدء کو نہین بدلو اور دونو حالتون مین محور قائم الزاویہ ہین

محوروں کے اور لا ی بلحاظ جدید محوروں کے ہیں ع م متوازی ط ی کا اور ع مَ متوازی ط یَ کا۔
اور ع اور مَ سے ع ل اور مَ ن عمود ط ی پر کھینچو اور مَ سے م ر عمود ع ل پر نکالو تو

لا = ی م    ی = ع م

لاَ = یَ مَ    یَ = ع مَ

اب ع ل = عمود کے جو م سے ط ی پر نکالا جائے = لا جب ( لا ی )

اور نیز ع ل = ر ل + ع ر = مَ ن + ع ر

= ط مَ جب لاَ ط ی + ع مَ جب یَ ط ی

= لاَ جب ( لاَ ی ) + یَ جب ( یَ ی )

∴ لا جب ( لا ی ) = لاَ جب ( لاَ ی ) + یَ جب ( یَ ی ) . . . (۱)

علی ہذا القیاس ع اور مَ سے عمود ط لا پر نکالنے سے ہم ثابت کر سکتے ہین

ی جب ( لا ی ) = لاَ جب ( لاَ لا ) + یَ جب ( یَ لا ) . . . (۲)

مساوات (۱) و (۲) مین قدیم محددین جدید محددین کی رقموں مین بیان کئے گئی ہین
( ی لا ) اور ( لا ی ) ایک ہی زاویہ کو تعبیر کرتے ہین لیکن ہم ان جملوں کو زیادہ قرینہ کے ساتھ کام مین لاتے ہین

فرض کرو کہ لا ط لاَ = هه اور لا ط یَ = ب اور لا ط ی = د تو مساوات (۱) و (۲) کے یہ

لا جب د = لاَ جب ( د − هه ) + یَ جب ( د − ب ) . (۳)

ی جب د = لاَ جب هه + یَ جب ب (۴)

(۸۴) دفعہ گذشتہ کی دو خاص صورتین بیان کی جاتی ہین

اگر اصل محور قائم الزاویہ ہون تو د = π/۲ تو مساوات (۳) اور (۴) اس صورت کی ہوجاتی ہین

لا = لاَ جم ھ + یَ جم ب

ی = لاَ جب ھ + یَ جب ب

اگر نئی محور قائم الزاویہ ہون تو ب = π/۲ + ھ اور مساواتین (۳) اور (۴) کی یہہ ہو جاتی ہین

لا جب د = لاَ جب (د − ھ) − یَ جب (د − ھ)

ی جب د = لاَ جب ھ + یَ جم ھ

(۸۵) ہم دونو محور اور مبدء کو تبدیل کرنا چاہتے ہین تو کسی نقطہ کے لا و ی محددین بلحاظ قدیم محورون کے اور لاَ و یَ اوسی نقطہ کے محددین بلحاظ جدید محورون کے فرض کرو بموجب دفعہ ۸۰ اور ۸۳ کی ہمکو یہہ حاصل ہے

لا = لا۱ + ح

ی = ی۱ + ق

جسمین ح اور ق محددین مبدء جدید لا کے بلحاظ قدیم محورون کے ہین اور

لا۱ = (لاَ جب (د − ھ) + یَ جب (د − ب)) ÷ جب د

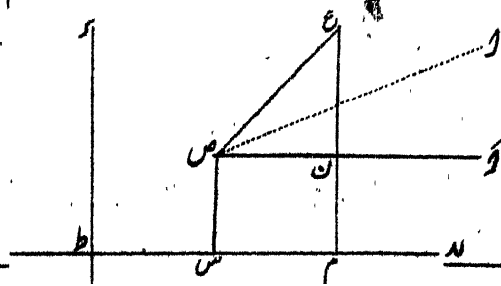
ی۱ = (لاَ جب ھ + یَ جب ب) ÷ جب د

اور جملے لا۱ ی۱ کے مختصر اور مفرد ہو سکتی ہین جب محور ایک نظم یا دونو نظمون مین قائم الزاویہ ہون

(۸۶) قائم الزاویہ اور قطبی محددین کے مربوط ہونے کی یہہ ایک خاص صورت بیان ہوئی ہی کہ دو نظمون مین مبدء ایک ہو اور محور لا کا ابتدای خط پر منطبق ہو دفعہ ۸ کو دیکھو اب ہم اوسکا بیان علی العموم کرتے ہین

ایک نقطہ کے قطبی اور قائم الزاویہ محددین کو آپسمین مربوط کرو

فرض کرو کہ ط لا اور ط ی قائم الزاویہ محور ہون اور ص قطب ہو اور ص ا مقام ابتدای اور ح اور ق

ی ع ا ص یَ ن ط س م لا

محددین ص کے بلحاظ ط کے فرض کرو اور ص لا متوازی ط لا کا نکالو اور زاویہ ا ص لا = ھہ
فرض کرو ع ایک نقطہ ہی جسکی محددین بلحاظ قائم الزاویہ محوروں کے لا و ی ہین اور ق اور ر اوسکے
قطبی محددین ہین ع م اور ص س متوازی ط ی کے کہچو جنمین سے ع م کو ص لا نقطہ ن پر قطع کر
اور ملاؤ ص ع تو

لا = ط م　　ی = ع م

ق = ص ع　　ر = زاویہ ع ص ا

اور لا = ط س + س م = ط س + ص ن

= ح + ق جم (ر + ھہ) . . . (۱)

ی = م ن + ع ن = ص س + ع ن

= ق + ق جب (ر + ھہ) . . . . . (۲)

اگر ھہ = ۰ تو لا = ح + ق جم ر　(۳)

ی = ق + ق جب ر　(۴)

(۸۷) اس باب مین جو صورتین بیان ہوئین ہین اونکی وساطت بعض اوقات مساوات کی
صورت کو مختصر اور سادہ بنا سکتے ہین مثلاً محور قائم الزاویہ ہون اور یہہ مساوات ہو کہ

لا² + ی² + ۶ لا² ی² = ۲　(۱)

اس مساوات سے بعض مقام النقاط تعبیر ہوتی ہین اور لا کی مختلف قیمتون کے لگانے سے ی کی
قیمتین موافق لا کی قیمتون کے معلوم ہوتی ہین اور اوسے مقام النقاط کے نقطے جتنی چاہیئے ہین متعین
کرتے ہین ۔ لیکن اس مساوات کی صورت نہایت سیدہی سادی اسطرح ہو سکتی ہی کہ محورون کو
پلٹ کر ۴۵ کے زاویہ پر لا ڈالین ۔ دفعہ ۸۱ کی صورتین ر کی جگہہ $\frac{\pi}{4}$ لکھو

لا = $\frac{لا - ی}{\sqrt{۲}}$　اور　ی = $\frac{لا + ی}{\sqrt{۲}}$

ان قیمتون کو مساوات (۱) مین لکھو

(لا + ی)⁴ + (لا - ی)⁴ + ۶ (لا² - ی²)² = ۸

∴ ۲ (لا⁴ + ۶ لا² ی² + ی⁴) + ۶ (لا⁴ - ی⁴) = ۸

یا لا⁴ + ی⁴ = ۱　(۳)

چونکہ (۳) بہ نسبت (۱) کے زیادہ سیدہے سادہ صورت مین ہے اسلیے مقام النقاط کا دریافت کرنا
مساوات (۳) سے اور جدید محورون کی استعانت سے بہ نسبت قدیم محورون کے سہل ہے

طالب علم اسبات کو خوب سمجھہ لو جنبہ کہ محوروں کے بدلنے سے کچھہ مقام التقاط نہین بدلتا یعنی مساوات (۱) اونہین نقاط کی اجتماع کو تعبیر کرتی ہی جنکو (۳) تعبیر کرتی ہی مثلاً نقطہ جسکے لا = ۰ اور ی = محددین مین بظاہر مقام التقاط (۳) پر واقع ہی اب موافق (۲) کے اسی نقطہ کے محددین ملحاظ

قدیم محوروں کے یہہ ہین لا = ۱/۲√۶ اور ی = ۱/۲√۶

اور یہی قیمتین (۱) کے شرائط کو پورا کرتی ہین یعنی یہہ نقطہ مقام التقاط (۱) پر واقع ہی

یہہ بات قابل لکھنے کے ہی کہ جب ہم محددین کو بدلتے ہین تو اوسے مساوات کے درجہ کو نہین بدل سکتے

اسواسطے کہ اگر ہر جملہ ا لا^ص ی^ب مین بجای لا اور ی کے قیمتین جو لا ی کے رقموں مین بیان کی گئی ہین

بموجب دفعات ۸۰ و ۸۴ و ۸۵ کے لکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ا (ک لا + ب لا + ج)^ص (س لا + ی ی + ق)^ب

اسمین ک و ب و س و ی و ج و ق مقادیر مستقل ہین جب ان جملوں کو پہیلا کر لکہینگے تو ہم ایک سلسلہ ارقام مین اس صورت ا لا^ص ی^ب کا دریافت کرینگے جسمین ص + ب سا زیادہ نسبت ص + ب کے نہین ہوگا اسے معلوم ہوا کہ ہیئت محددین کی مبدل ہونے سے مساوات کا درجہ نہین بڑہ سکتا اور نہ کوئی درجہ مساوات کا گہٹ سکتا ہی اسلئے کہ اگر ہیئت کے متبدل ہونے سے درجہ کسی مساوات کا گہٹ جای تو جو مساوات گہٹی ہوئی درجہ کی حاصل ہوگی اوسپر عمل معکوس کرنے سے وہی مساوات حاصل ہوجائیگی جسکا درجہ گہٹایا تہا اب اس گہٹی ہوئی درجہ سے مساوات کا درجہ بڑہ گیا اور یہہ پہلے ہم ثابت کرائی ہین کہ درجہ بڑہ نہین سکتا اسلئے ثابت ہوا کہ درجہ گہٹ بہی نہین سکتا

# مثالین

(۱) مساوات نق^۲ = طا^۲ جم ۲ ر کو ایک ایسی مساوات مین تبدیل کردو کہ جو لا اور ی کے درمیان ہو

(۲) ثابت کرو کہ مساوات ۲ لا ی - ۳ لا^۲ = ک^۲ بدلکر مساوات لا^۲ - ۴ ی^۲ = ک^۲ کی صورت ہو جاتی اگر محور پلٹ کر ایسی ہوجائین کہ اون کے درمیان کا زاویہ ایسا ہو جسکا مماس ۲ ہو

(۳) ۲ لا + ۵ ی = ۶ س کی صورت ایسی بدل دو کہ اصل محور پر ۵ ۴ کا میلان رکہی

(۴) بلحاظ محور قائم الزاویہ کے مساوات ایک خط منحنی کی یہ ہے $ی^2 + ۲ ا ی$ مم ھھ − ۴ الا = ۰
اوسکی مساوات بلحاظ محور محرف کی دریافت کرو جو محور لا پر زاویہ ا کا میل رکھی ہے

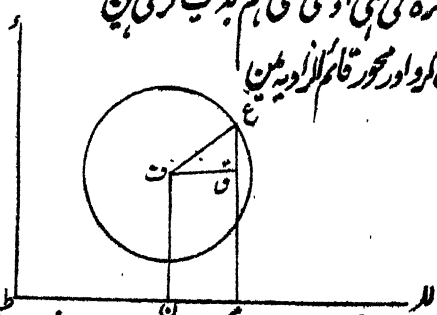
(۵) ثابت کرو کہ مساوات $لا ی = ا (لا^3 + ی^3)$ بلحاظ ی کے حل ہو سکتی ہی اگر محور ۳۰ زاویہ کے درمیان حرکت کریں

(۶) لا اور ی محاددین ایک نقطہ کے بلحاظ ایک محرف محوروں اور $لاَ$ $یَ$ بلحاظ دوسرے محرف محوروں کے ہوں اور
لا = م لاَ + ن یَ اور ی = مَ لاَ + نَ یَ
تو ثابت کرو کہ $\frac{م^2 + مَ^2 - ۱}{ن^2 + نَ^2 - ۱} = \frac{م مَ}{ن نَ}$

# باب ششم

## دائرہ

(۸۸) اب ہم اون مقام النقاط کا ذکر کرینگے جنکی مساواتیں درجہ دوم کی ہیں اونمیں سے زیادہ سیدھی سادی مساوات دائرہ کی ہی اوسی سی ہم بدایت کرتی ہیں

مساوات دائرہ کی دریافت کرو اور محور قائم الزاویہ میں

فرض کرو کہ ف مرکز دائرہ کا ہی ع کوئی نقطہ اوسکی محیط میں ہی اور س نصف قطر دائرہ کا ہی اور اوب محاددین ف کے ہیں اور لا و ی محاددین نقطوع کے ہیں ف ن اور ع م متوازی ی ط اور ط لا کے نکالو تو $ف ق^2 + ع ق^2 = ف ع^2$

یعنی $(لا - ط)^2 + (ی - ص)^2 = س^2$ (۱)

$لا^2 + ی^2 - ۲ ط لا - ۲ ص ی + ط^2 + ص^2 - س^2 = ۰$ (۲)

یہ مساوات مطلوب ہے

اس مساوات میں تبدلات ذیل واقع ہوتے ہیں

اول فرض کرو کہ مبدء محاددین مرکز پر واقع ہو تو ط = ۰ اور ص = ۰ پس

(۱) اور (۲) یہہ ہو جائیگی کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - \text{س}^2 = ۰ \qquad (۳)$$

**دوم** فرض کرو کہ اصل محیط دائرہ پر واقع ہو تو قیمتیں لا = ۰ اور ی = ۰ مساوات (۲) (۱) کی شرائط کو پورا کرینگی

اسیواسطے $\text{ط}^2 + \text{ص}^2 - \text{س}^2 = ۰$ جب ط محیط پر واقع ہو تو

یہہ ارتباط شکل سے صاف ظاہر ہے اسسے ثابت ہوا کہ مساوات (۲) کی یہہ شکل ہوگی کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - ۲\,\text{ط لا} - ۲\,\text{ص ی} = ۰ \qquad (۴)$$

**سوم** فرض کرو کہ مبدء محیط دائرہ ہوی اور قطر جو مبدء پر گذرتا ہی محور لا سفر کیا جائے تو

ص = ۰ اور $\text{ط}^2 = \text{س}^2$ اس سببسے مساوات (۲) یہہ ہو جائیگی کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - ۲\,\text{ط لا} = ۰ \qquad (۵)$$

اسیطرح اگر مبدء محیط دائرہ پر ہو اور قطر جو مبدء مین گذرتا ہی محور ی پر منطبق ہو تو

ط = ۰ اور $\text{ص}^2 = \text{س}^2$ اس سبب مساوات (۲) یہہ ہو جائیگی کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 - ۲\,\text{ص ی} = ۰ \qquad (۶)$$

پس اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۲) سے یہہ نتیجہ نکل سکتا ہی کہ جب محور قائم الزاویہ ہون تو ہمیشہ مساوات دائرہ کی اس صورت کی ہوگی

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 + \text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{ج س} = ۰$$

اسمین ا و ب و س مقادیر مستقل مین ایک یا کئی انمین سے خاص صورتون مین مساوی صفر کی ہوسکتی مین

(۸۹) بالعکس اسکے اگر مساوات یہہ ہو کہ $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 + \text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{س} = ۰$ تو اسکا مقام انتقاط ایک دائرہ ہوگا — مساوات (۱) اسطرح لکہی جا سکتی ہی کہ

$$\left(\text{لا} + \frac{\text{ا}}{۲}\right)^2 + \left(\text{ی} + \frac{\text{ب}}{۲}\right)^2 = \frac{\text{ا}^2 + \text{ب}^2}{۴} - \text{س} \qquad (۲)$$

**اول** اگر $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۴\,\text{س}$ منفی ہو تو مقام انتقاط ہی ناممکن ہو جاتا ہے

**دوم** اگر $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۴\text{س} = ۰$ تو مساوات (۲) ایک نقطہ کو تعبیر کرتی ہی جسکی محددین $-\frac{\text{ا}}{۲}$ او $-\frac{\text{ب}}{۲}$ ۔ اس نقطہ کو ایک دائرہ خیال کر سکتی ہین جسکا نصف قطر لاانتہا چھوٹا ہی

**سوم** اگر $\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۴\text{س}$ مثبت ہو تو مساوات (۲) کو دفعہ بالا کی مساوات (۱) کے ساتھ مقابلہ کرکی کہہ سکتی ہین کہ وہ ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہی کہ جسکی مرکز کی محددین $-\frac{\text{ا}}{۲}$ و $-\frac{\text{ب}}{۲}$ ہین اور نصف قطر $\frac{۱}{۲}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2 - ۴\text{س})^{\frac{۱}{۲}}$ یہہ مشق نہایت فائدہ مند ہوگی اگر کوئی مساوات اس شکل کی ہو کہ $\text{لا}^2 + \text{ی}^2 + \text{الا} + \text{بی} + \text{س} = ۰$ تو اوسے دائرہ بناوین مثلاً مساوات یہہ ہے کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 + ۴\text{لا} - ۸\text{ی} - ۵ = ۰$$

$$\text{یا}\ (\text{لا} + ۲)^2 + (\text{ی} - ۴)^2 = ۵ + ۴ + ۱۶ = ۲۵$$

پس اسے معلوم ہوا کہ مرکز کے محددین ۲ و ۴ ہین اور نصف قطر ۵ ہے

## مماس اور عمود المماس

(۹۰) حد اگر دو نقطے ایک خط منحنی پر لئے جائین اور اونمین خط قاطع المنحنی کھینچا جائے اول نقطہ قائم رہے اور اس جگہہ سے اپنی نہ ہلی اور دوسرا نقطہ خط منحنی پر اول نقطہ تک متحرک ہو تو خط قاطع اس اپنی محدودہ مقام مین مماس خط منحنی کا اول نقطہ پر کہلائیگا ۔

(۹۱) دائرہ کے کسی نقطہ سے جو مماس نکالا جائے اوسکی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات دائرہ کی یہہ ہو کہ

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{س}^2$$

اور $\text{لا}'$ و $\text{ی}'$ محددین اوس نقطہ کے ہین جسپر مماس کھینچا گیا ہی اور $\text{لا}''$ اور $\text{ی}''$ نقطہ متصلہ کے محددین ہین تو مساوات خط قاطع کے جو نقاط ($\text{لا}'$ و $\text{ی}'$) و ($\text{لا}''$ و $\text{ی}''$) پر گذرتا ہی یہہ ہوگی

$$\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'}(\text{لا} - \text{لا}') \quad (۲)$$

اب چونکہ ($\text{لا}'$ و $\text{ی}'$) اور ($\text{لا}''$ و $\text{ی}''$) دونو نقطے محیط دائرہ پر ہین اسلئے

$$\text{لا}'^2 + \text{ی}'^2 = \text{س}^2$$

$$\text{لا}''^2 + \text{ی}''^2 = \text{س}^2$$

اسیواسطے قیمتون کے رکھنے $\text{لا}''^2 - \text{لا}'^2 + \text{ی}''^2 - \text{ی}'^2 = ۰$

$$\text{یا}\ (\text{لا}'' - \text{لا}')(\text{لا}'' + \text{لا}') + (\text{ی}'' - \text{ی}')(\text{ی}'' + \text{ی}') = ۰$$

(یً − یَ)/(لاً − لاَ) = − (لاً + لاَ)/(یً + یَ) پس مساوات (۲) اسطرح لکھی جاسکتی ہے کہ

ی − یَ = − (لاً + لاَ)/(یً + یَ) (لا − لاَ)      (۳)

لیکن اوس حد مین کہ (لاً و یً) منطبق (لاَ و یَ) کے ساتھہ ہوتا ہے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لاً = لاَ و یً = یَ اسلئے مساوات (۳) یہہ ہوجائیگی

ی − یَ = − ۲لاَ/۲یَ (لا − لاَ) = − لاَ/یَ (لا − لاَ)

پس مساوات مماس کی نقطہ (لاَ و یَ) پر یہہ ہوگی کہ

ی − یَ = − لاَ/یَ (لا − لاَ)

اس مساوات کو یَ مین ضرب دینے سے اور منتقل کرنے سے یہہ صورت ہوجائیگی کہ

لالاَ + ییَ = لاَ² + یَ²

لالاَ + ییَ = س²

(۹۲) مساوات مماس کی نہایت آسانی سے اوس زاویہ کی مماس کی رقمون مین لکھی جاسکتی ہی جو خط محور لا سے بناتا ہے اسواسطے کہ مساوات مماس (لاَ و یَ) کی یہہ ہے

ییَ + لالاَ = س²

یا ی = − لاَ/یَ لا + س²/یَ

فرض کرو کہ − لاَ/یَ = م پس مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

ی = م لا + س²/یَ

پس س²/یَ کو مماس کی رقمون مین بیان کرنا باقی رہا

اب لاَ = − م یَ

اور لاَ² + یَ² = س² ∴ یَ² (۱ + م²) = س²

یَ = س/(۱ + م²)^¹⁄₂

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مماس کی اسطرح لکھی جاتی ہے

ی = م لا + س (۱ + م²)^¹⁄₂

بالعکس اسکے جو مساوات اس صورت کی ہوگی وہ مماس دائرہ کی ہے

(۹۳) دفعہ ۹۰ کی حدود کو شاید طالب علم یہہ کہیگا کہ اقلیدس کی تعریف کیون چھوڑ کر ایک نئی تعریف اپنی دل سے گھڑ لی ہی تو اوسکا جواب یہہ ہے کہ اقلیدس کی تعریف مخصوص دائرہ کے ساتھہ ہے اور دفعہ ۹۰ کی تعریف علی العموم سب خطوط منحنی کے مماس کے واسطے ہے۔

اور اگر کسی حدود دیر طالب علم رائی دینی کا مجاز نہیں ہی وہ نہیں پوچھ سکتا کہ کیون حل ایسا بنایا ہی اور اوس سے
کیا نفع نکلتا ہے اور اوسمین کیا خصوصیت ہی ہان جب وہ آگے بڑہی اور نتایج حدود کو دیکھے
کہ کیا نکلتے ہین اور اون سے مقدمات کس طرح مرتب ہوتی ہین تو البتہ اوسوقت رای دینی کا مجاز ہے

اگر کسی خط کی مساوات

$$\text{لا لاَ} + \text{ی یَ} = \text{س}^2 \quad (1) \text{ ہو}$$

تو ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہین کہ وہ بموجب حدود اقلیدس کے دائرہ کو مس کرتا ہی

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{س}^2 \quad \dots\dots (2)$$

نقطہ (لاَ ، یَ) کو فرض کرو کہ دائرہ پر واقع ہی - ایک نقطہ یا نقطے تقاطع خط اور دائرہ کے باہم دریافت
کرنیکے لئے مساواتین (۱) اور (۲) کو مرکب کرتی ہین اور (۲) مین ہم قیمت ی کی (۱) سی دریافت
کر کے لکھتے ہین تو

$$\text{لا}^2 + \left(\frac{\text{س}^2 - \text{لا لاَ}}{\text{یَ}}\right)^2 = \text{س}^2$$

$$\text{یا } \text{لا}^2(\text{لاَ}^2 + \text{یَ}^2) - 2\,\text{س}^2\,\text{لا لاَ} + \text{س}^4 - \text{س}^2\,\text{یَ}^2 = 0$$

$$\text{س}^2\,\text{لا}^2 - 2\,\text{س}^2\,\text{لا لاَ} + \text{س}^2\,\text{لاَ}^2 = 0$$

$$\therefore \text{لا}^2 - 2\,\text{لا لاَ} + \text{لاَ}^2 = 0$$

$$\therefore \text{لا} = \text{لاَ}$$

$$\therefore \text{مساوات } (1) \text{ سے } \text{ی} = \text{یَ}$$

اسے معلوم ہوا کہ (۱) اور (۲) دونو فقط ایک ہی نقطہ پر ملتے ہین اور وہ نقطہ لاَ و یَ ہی
پس سے ثابت ہی کہ (۱) دائرہ کو بموجب حدود اقلیدس کے ایک ہی نقطہ پر مس کرتا ہی

(۹۴) ہر خط جو دائرہ سے صرف ایک ہی نقطہ پر ملتا ہی صرف مماس ہی دائرہ کا ہوتا ہے
اسواسطے کہ فرض کرو

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{س}^2$$

ایک دائرہ کی مساوات ہو اور

$$\text{ی} = \text{م لا} + \text{ن}$$

مساوات ایک خط مستقیم کی ہو اب دائرہ اور خط کے نقاط تقاطع دریافت کرنے کے لئے ہم
مساواتونکو شامل کرتی ہین تو اسطرح ہمکو نقطونکی محدد متعین کرنیکے واسطے یہہ حاصل ہوگا

$$(\text{م لا} + \text{ن})^2 + \text{لا}^2 = \text{س}^2$$

$$\text{یا } (\text{م}^2 + 1)\,\text{لا}^2 + 2\,\text{م ن لا} + \text{ن}^2 - \text{س}^2 = 0$$

اب اس مساوات کی دو قیمتین ہونگی لا کی اس صورت مین کہ

$$(\text{م}^2 + ۱)(\text{ن}^2 - \text{س}^2) = \text{م}^2\,\text{ن}^2$$

یعنی جب $\text{ن}^2 = \text{س}^2(۱ + \text{م}^2)$

اسے ثابت ہوا کہ اگر خط مستقیم دائرہ سے ملتا ہی تو وہ دو نقطوں پر ملے گا بشرطیکہ اوسمین شرط مذکور نہ پائی جاے تو بموجب دفعہ ۹۲ کے یہہ خط مماس دائرہ کا ہوا

(۹۵) دائرہ پر جو نقطے قائم دفعہ ۹۰ مین بیان ہوئی ہین اور اسمین ایک نقطہ قائم رکہا ہی اور دوسرے کو متحرک کیا ہی اگر بجاے ایک نقطہ کے متحرک ہونیکے دونو نقطہ ایک دوسرے کی طرف دائرہ پر متحرک ہوکر ایک نقطہ پر ملجاوین تو خط قاطع ایسی مقام محدودہ مین نقطہ قائم پر مماس ہوگا۔ اسواسطے کہ فرض کرو (لاَ، یَ) و (لاً، یً) دو نقطے متحرک دائرہ پر ہون اور (لا۱، ی۱) نقطہ قائم ہو۔ تو بموجب مساوات (۳) دفعہ ۹۱ کے مساوات خط قاطع کی یہہ ہوگی

$$\text{ی} - \text{یَ} = - \frac{\text{لاً} + \text{لاَ}}{\text{یً} + \text{یَ}}\,(\text{لا} - \text{لاَ})$$

پس مقام محدودہ مین لاَ اور لاً مین ہر ایک = لا۱ اور یَ و یً مین ہر ایک = ی۱ پس نقطہ لا۱ ی۱ پر مماس کی مساوات یہہ ہوگی کہ $\text{ی} - \text{ی}_1 = - \frac{\text{لا}_1}{\text{ی}_1}(\text{لا} - \text{لا}_1)$ اور یہہ مطابق نتیجہ سابق کے ہی

(۹۶) اگر دائرہ کی مساوات اس صورت

$$(\text{لا} - \text{ط})^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2 - \text{س}^2 = ۰$$

مین معلوم ہو

تو ہر نقطہ کے مماس کی مساوات ہم دفعہ ۹۱ کی طرح حاصل کرسکتی ہین

فرض کرو کہ نقطہ (لاَ، یَ) دائرہ پر ہی جسپر مماس کہنچا گیا ہی اور (لاً، یً) ایک متصل نقطہ دائرہ پر ہی تو

$$(\text{لاَ} - \text{ط})^2 + (\text{یَ} - \text{ص})^2 - \text{س}^2 = ۰$$

$$(\text{لاً} - \text{ط})^2 + (\text{یً} - \text{ص})^2 - \text{س}^2 = ۰$$

$$\therefore (\text{لاً} - \text{ط})^2 - (\text{لاَ} - \text{ط})^2 + (\text{یً} - \text{ص})^2 - (\text{یَ} - \text{ص})^2 = ۰$$

$$\text{یا}\ (\text{لاً} - \text{لاَ})(\text{لاً} + \text{لاَ} - ۲\text{ط}) + (\text{یً} - \text{یَ})(\text{یً} + \text{یَ} - ۲\text{ص}) = ۰ \qquad (۱)$$

اور مساوات خط قاطع کی جو (لاَ، یَ) اور (لاً، یً) پر گذرتا ہے

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{یً} - \text{یَ}}{\text{لاً} - \text{لاَ}}\,(\text{لا} - \text{لاَ}) \qquad (۲)$$

اور بوساطت مساوات (۱) کے یہہ لکہا جاسکتا ہی کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = - \frac{\text{لاً} + \text{لاَ} - ۲\text{ط}}{\text{یً} + \text{یَ} - ۲\text{ص}}\,(\text{لا} - \text{لاَ}) \ldots\ldots (۳)$$

اب حد مماسی کی حالت مین $\text{لاَ} = \text{لا}$ اور $\text{یَ} = \text{ی}$ اسواسطے مساوات مماس نقطه (لاَ و یَ) کی یہہ ہوگی که

$$\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\text{لاَ} - \text{ط}}{\text{یَ} - \text{ص}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right) \quad . \ . \ . \ . \quad (۴)$$

اور یہہ مساوات اسطرح بہی لکہی جاسکتی ہی کہ

$$\text{ی} - \text{ص} - (\text{یَ} - \text{ص}) = -\frac{\text{لاَ} - \text{ط}}{\text{یَ} - \text{ص}}\left[(\text{لا} - \text{ط}) - (\text{لاَ} - \text{ط})\right]$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{ط})(\text{لاَ} - \text{ط}) + (\text{ی} - \text{ص})(\text{یَ} - \text{ص}) = (\text{لاَ} - \text{ط})^2 + (\text{یَ} - \text{ص})^2 = \text{س}^2 \quad . \ . \ . \quad (۵)$$

(۹۷) حد خط منحنی کے کسی نقطه سے عمود اوس مماس پر نکالا جاے جو اوس نقطه سی خط منحنی کا کہینچا جاے تو اس عمود کو عمود المماس خط منحنی کا کہتے ہین

(۹۸) ایک دائره کے کسی نقطه کی عمود المماس کی مساوات دریافت کرو

فرض کرو که مساوات دائره کی یہہ ہو که

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{س}^2 \quad (۱)$$

اور جو نقطه دائره پر لیا گیا ہی اوسکی محددین لاَ و یَ فرض کرو تو مساوات اس نقطه کی مماس کی یہہ ہوگی

$$\text{لا}\,\text{لاَ} + \text{ی}\,\text{یَ} = \text{س}^2$$

$$\text{یا}\quad \text{ی} = -\frac{\text{لاَ}}{\text{یَ}}\,\text{لا} + \frac{\text{س}^2}{\text{یَ}}$$

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات اوس خط کی جو (لاَ و یَ) کسے عمود مماس پر ہو یہہ ہوگی که

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{ی} = \frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}\,\text{لا}$$

چونکه شرطین اس مساوات کی ان قیمتون لا کے سے که $\text{لا} = ۰$ اور $\text{ی} = ۰$ پوری ہوتی ہین تو اسسے معلوم ہوا که عمود المماس مبدء مین یعنی مرکز مین دائره کے گذرتا ہے

(۹۹) دائره کے نقطه بیرونی سے دو مماس نکل سکتے ہین

فرض کرو که مساوات دائره کی یہہ ہے که

$$\text{لا}^2 + \text{ی}^2 = \text{س}^2$$

اور ح اور ق محددین کسی نقطه بیرونی کے ہین اور لاَ و یَ محددین اوس نقطه کی فرض کرو جسسے مماس نکالا گیا نقطه (ح و ق) پر گذرتا ہی ـ مساوات مماس نقطه (لاَ و یَ) کی یہہ ہے که

$$\text{لا}\,\text{لاَ} + \text{ی}\,\text{یَ} = \text{س}^2 \quad (۲)$$

چونکه یہہ مماس نقطه (ح و ق) پر گذرتا ہی اسلئے مساوات اوسکی یہہ بہی ہوگی که

$$\text{ح}\,\text{لاَ} + \text{ق}\,\text{یَ} = \text{س}^2 \quad . \ . \ . \ . \quad (۳)$$

اور چونکه (لاَ و یَ) دائره پر ہین اسلئے

$$لا^2 + ی^2 = س^2 \quad (۴)$$

مساوات (۳) اور (۴) سے قیمتیں لا و ی کی متعین ہوتی ہیں (۳) کی قیمتیں (۴) میں لکھو

$$لا^2 + \left(\frac{س^2 - ح\,لا}{ق}\right)^2 = س^2$$

$$\therefore\ لا^2(ح^2 + ق^2) - 2س^2\,ح\,لا + س^2(س^2 - ق^2) = 0$$

اس مساوات درجہ دوم کی دونو قیمتیں ممکن ہیں کیونکہ (ح اور ق) ایک نقطہ بیرونی ہی اسلئے $ح^2 + ق^2$ بڑا $س^2$ سے ہے ہر قیمت لا کی موافق قیمت ی کی (۳) کے ہی اسسے معلوم ہوا کہ دو مماس ہر دائرہ کے ہر نقطہ بیرونی سے کھچ سکتی ہیں

جن نقطون پر یہہ مماس دائرہ کو مس کرتے ہیں اونمیں خط ملایا گیا وتر تماس کہلاتا ہے،

(۱۰۰) نقطہ بیرونی معلوم سے مماس ایک دائرہ کے کھیچے گئے ہیں مساوات وتر تماس کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ح اور ق محددین نقطہ بیرونی کے ہین اور نقطہ ح اور ق سے جو ایک مماس نکالا گیا ایک نقطہ پر مس کرتا ہی اوسکی اور $لا_1$ اور $ی_1$ محددین اوس نقطہ تماس کے ہین جسپر کہ نقطہ ح اور ق سے ایک مماس نکالا گیا دائرہ مس کرتا ہی اور $لا_2$ اور $ی_2$ محددین دوسرے نقطہ تماس کے ہین جہان دوسرا مماس نقطہ (ح و ق) سے نکالا گیا دائرہ کو مس کرتا ہی مساوات مماس ($لا_2$ و $ی_2$) پر یہہ ہو گی کہ

$$لا\,لا_1 + ی\,ی_1 = س^2 \quad (۱)$$

اور چونکہ مماس نقطہ ح و ق پہ گذرتا ہی اسلئے یہہ مساوات حاصل ہو گی کہ

$$ح\,لا_1 + ق\,ی_1 = س^2 \quad (۲)$$

اور علی ہذا القیاس مماس جو (ح و ق) سے نکالا گیا ہی نقطہ $لا_2$ و $ی_2$ پر مس کرتا ہی یہہ مساوات پیدا کریگا

$$ح\,لا_2 + ق\,ی_2 = س^2 \quad (۳)$$

اسسے یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ مساوات وتر تماس کی یہہ ہے کہ

$$لا\,ح + ی\,ق = س^2 \quad (۴)$$

اسواسطے کہ ظاہر معلوم ہوتا ہی کہ (۴) مساوات کسی خط مستقیم کی ہی اور یہہ خط ($لا_1$ و $ی_1$) پہ گذرتا ہے، کیونکہ (۴) کی شرائطان قیمتون سے پوری ہوتی ہین کہ $لا = لا_1$ اور $ی = ی_1$ یہہ بات مساوات (۲) کی دکہا رہی ہی اور علی ہذا القیاس مساوات (۳) سے یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ یہہ خط ($لا_2$ و $ی_2$) پہ گذرتا ہی۔ پس اسسے ثابت ہوتا ہی کہ (۴) مساوات مطلوبہ ہے

پس اسطرح سے دائرہ کے مماس نقطہ بیرونی معلوم سے کہیچ سکتے ہین کہ اول وہ خط کہیچین جو مساوات (۴) سے تعبیر ہوتا ہے اور پہر نقطہ بیرونی اور ان نقطون ہا مین خط ملائین جہان وہ دائرہ سے ملتا ہے تو اسطرح جو خطوط حاصل ہونگی وہ مماس مطلوب ہا ہونگی

(۱۰) دائرہ کے وتر ایک نقطہ معین سے کہیچے گئے ہین اور ان وترون کی طرفون سے مماس نکالے گئے ہین تو ثابت کرو کہ ان مماسونکی نقاط تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

فرض کرو کہ ح اور ق محددین اوس نقطہ کے ہین جسسے اوتار کہیچے گئے ہین اور ان وترون مین سی ایک وتر کے طرفین سے مماس دائرہ کے کہیچے گئے ہین اور لا، ی، وہ نقطہ ہی جسپر مماس ملتی ہین تو مساوات وتر تماس کی بموجب دفعہ ۰۰ اسکے یہہ ہوگی کہ

لا لا، + ی ی، = س٢

لیکن یہہ وتر (ح و ق) پر بہی گذرتا ہی اسلیے

ح لا، + ق ی، = س٢

اسے معلوم ہوا کہ نقطہ لا، ی، اس خط پر واقع ہی کہ

لا ح + ی ق = س٢

یعنی مقام النقاط مماسون کے نقطہ تقاطع کا ایک خط مستقیم ہے

اب ہم اس دعوی کا عکس ثابت کرتے ہین

(۱۰۲) اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ سے دو مماس دائرہ کے کہیچے جائین تو اوتار تماس ایک نقطہ معین پر گذرینگے

فرض کرو کہ ا لا + ب ی + س = ۰

مساوات ایک خط مستقیم کی ہی اور اس خط کا ایک نقطہ لاَ یَ ہی جسسے مماس دائرہ کے کہیچے گئی ہا ہین تو ان مماسون کے وتر تماس کی مساوات یہہ ہوگی کہ

لا لاَ + ی یَ = س٢ (۲)

اور چونکہ لاَ اور یَ (۱) مین واقع ہین تو

ا لاَ + ب یَ + س = ۰

اسواسطے مساوات (۲) اسطرح لکہی جاسکتی ہے کہ

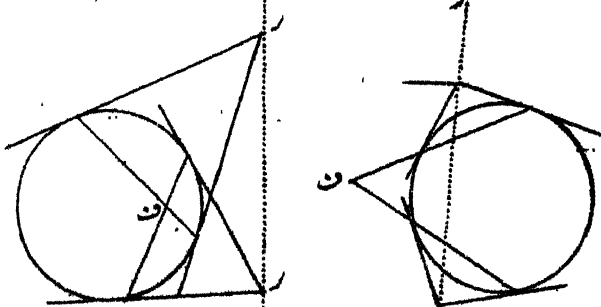
$$\text{لا لاَ} - \text{ی}\ \frac{\text{ا لاَ} + \text{س}}{\text{ب}} = \text{س}^2$$

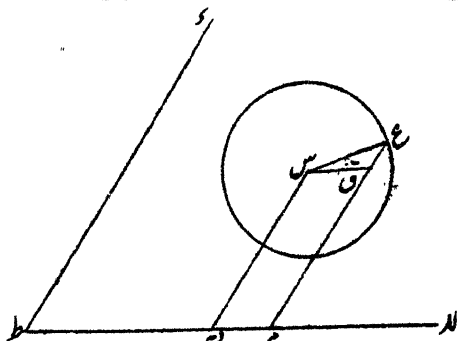
$$\text{یا}\ \left(\text{لا} - \frac{\text{ا ی}}{\text{ب}}\right)\text{لاَ} - \frac{\text{ی س}}{\text{ب}} - \text{س}^2 = 0 \qquad (۳)$$

اب خواہ کچہہ ہی قیمت لاَ کی فرض کرو یہہ خط اوس نقطہ پر گذرتا ہی جسکے محددین ان

مساواتون سے دریافت ہوتے ہین کہ لد − ا ر/ب = ۰ اور ر س/ب + س ۲ = ۰
یعنی نقطہ جسکے واسطے ر = − س ۲ ب/س ل اور لد = − ا س ۲/س ل

(۱۰۳) طالب علم کو دیکھنا چاہیے کہ کیا کیا مختلف معنی مساوات
لد ح + ر ق − س ۲ = ۰ کے لگائی جاتی ہین

اول اگر (ح اور ق) کوئی سا نقطہ ہو تو مساوات اوس مقام النقاط کو تعبیر کرتی ہی جو مماسون کے نقطہ تقاطع سے کہ وتر تماس کی اطراف سی نکالی جائین نقطہ ح اور ق پر گذرتا ہی
دوم اگر (ح اور ق) نقطہ بیرونی ہو تو بموجب (۱۰۰) کے وہ وتر تماس کو تعبیر کریگی
سوم اگر ح اور ق) دائرہ پر ہو تو مساوات اوس نقطہ کے مماس کو بموجب دفعہ ۹۱ کے تعبیر کریگی
اس شکل مین ف تعبیر کرتا ہی نقطہ (ح اور ق) اور
لد ح + ر ق = س ۲ خط رر ہی

اول شکل مین نقطہ ف دائرہ کی اندر ہی اسلئی رر کے معنی فقط اول ہی لئے جا سکتی ہین اور دوسری شکل مین ف باہر دائرہ سی واقع ہی اسلئی رر کے دونو معنی اول اور دوم لئے جا سکتے ہین اسیواسطے اگر مماس نقطہ ف سے دائرہ کے کہیچے جائین تو وہ دائرہ سی اون نقطون پر ملینگے جہان رر او سے تقاطع کرتا ہی
اگر ف دائرہ پر ہے تو رر مماس نقطہ ف پر ہوگا

## محور غیر قائم الزاویہ یا منحرف

فرض کرو کہ زاویہ د پر محور ایک دوسرے کی طرف مائل ہوں اور س مرکز دائرہ اور ع ایک نقطہ اوسکے محیط پر اور س نصف قطر دائرہ کا اور ط و ص محددین نقطہ س کے اور لا و ی محددین نقطہ ع کی ہیں س ن اور ع م متوازی ط ی کی اور س ق متوازی ط لا کے نکالو تو

س ع^۲ = س ق^۲ + ع ق^۲ − ۲ س ق . ع ق جم س ق ع

= س ق^۲ + ع ق^۲ + ۲ س ق . ع ق جم د

یعنی (لا − ط)^۲ + (ی − ص)^۲ + ۲ (لا − ط) (ی − ص) جم د = س^۲

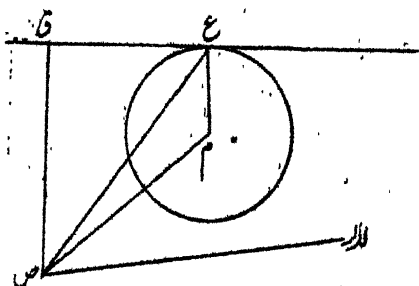
یا لا^۲ + ی^۲ + ۲ لا ی جم د − ۲ (ط + ص جم د) لا − ۲ (ص + ط جم د) ی
+ ط^۲ + ص^۲ + ۲ ط ص جم د − س^۲ = ۰

اسے معلوم ہوا کہ مساوات دائرہ کی بلحاظ منحرف محوروں کے اس شکل کی ہوگی

لا^۲ + ی^۲ + ۲ لا ی جم د + ا لا + ب ی + س = ۰

اسمیں ا و ب و س مستقل مقادیر ہیں

## قطبی مساوات

(۱۰۵) مساوات قطبی دائرہ کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ص قطب ہو اور ص لا مقام ابتدائی اور م مرکز دائرہ اور ع کوئی نقطہ اوسکی محیط پر ہی اور ص س = ل اور س ص لا = هه مفروض محددین قطبی نقطہ س کے ہین اور س نصف قطر دائرہ کا ہے اور نق اور ر قطبی محددین نقطہ ع کے ہین تو

س ع۲ = ع ص۲ + م ص۲ - ۲ ع ص م ص جم ع ص م

یعنی س۲ = نق۲ + ل۲ - ۲ ل نق جم (ر - هه) (۱)

یا نق۲ - ۲ نق ل (جم هه جم ر + جب ر جب هه) + ل۲ - س۲ = ۰ (۲)

اسے معلوم ہوا کہ مساوات قطبیہ دائرہ کی اس صورت کی ہوتی ہی کہ

نق۲ + ا نق جم ر + ب نق جب ر + س = ۰

اوس مساوات سی کہ بلحاظ محور قائم الزاویہ کے دفعہ ۸۸ مین لکھی ہے لا کی جگہہ نق جم ر اور ی کی جگہہ نق جب ر رکھنی سے مساوات قطبیہ حاصل ہو سکتی ہے اگر مقام ابتدائی قطر ہو تو هه = ۰ اس سبب سے مساوات (۱) کی صورت یہہ ہوگی کہ

نق۲ - ۲ ل نق جم ر + ل۲ - س۲ = ۰ . . . . (۴)

اور اگر یہہ اسپر اور مزید ہو کہ مبدء بہی محیط پر واقع ہی تو محیط پر ل۲ = س۲

نق = ۲ ل جم ر (۵)

(۱۰۶) دائرہ کا ایک مماس کسی نقطہ پر ہی اور اوسپر عمود مبدء سے نکالا گیا ہی تو اوسکو نصف قطر دائرہ کی رقموں مین اوس نقطہ کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ص ق عمود مماس نقطہ ع پر مبدء سے نکالا گیا ہی اور ص ق = ع تو

ص س۲ = ص ع۲ + ع م۲ - ۲ ص ع . ع م جم ص ع س

= ص ع۲ + ع م۲ - ۲ ص ع . ع م جب ص ع ق

یعنی ل۲ = نق۲ + س۲ - ۲ س ع

شکل مین ص اور م دونوں ایک ہی جانب مین مماس نقطہ ع کی واقع ہین - اگر ہم نقطہ ع آیسا مقرر کریں کہ مماس نقطہ ع کا درمیان ص اور م کے واقع ہو تو ہمکو معلوم ہوگا کہ

ل ا = ق ا + س ا + ۲ س ع

(۱۰۷) یہہ مساواتین بعض اوقات سوالات کے حل کرنے مین اور دائرہ کی خاصیتون کے ثابت کرنے مین کام آتی ہیں

مثلاً مساوات (۴) دفعہ ۱۰۵ کی ہو تو

بوا - ۲ بق ل جم ر + ل ا - س ا = ۰

بموجب خواص مساوات درجہ دوم کے ہم دیکھتے ہین کہ حاصلضرب بو کی دو قیمتون کا مطابق ر کے کسی قیمت کے ل ا - س ا ہی اور اسکا کچہہ تعلق ر سکی نہین ہی اور یہہ نتیجہ مطابق اقلیدس کی مقالہ سوم کی ۳۵ و ۳۶ شکل کے ہے

اور نیز مجموعہ ر کی دو قیمتون کا ۲ ل جم ر ہی سے معلوم ہوا کہ اگر ایک خط قطب سے کہیجا جاے اور مقام ابتدای سے ر پر میل رکہی تو قطبی محددین نقطہ وسط وتر کے جو دائرہ اس خط مین قطع کرتا ہی یہہ ہین

$\frac{۲ ل جم ر}{۲}$ اور ر یعنی ل جم ر اور ر ہین

اسے معلوم ہوا کہ مساوات قطبیہ مقام النقاط نقطہ وسط وتر کی یہہ ہے کہ

بو = ل جم ر

اور یہہ بموجب دفعہ ۱۰۵ کے (ہ) کے دائرہ کی مساوات ہی

## مثالین

(۱) مقام اور مقدار ان دائرون کے تعیین کرو کہ جنکی مساواتین یہہ ہین

(۱) لا ا + ی ا + ۴ ی - ۴ لا - ۱ = ۰

(۲) لا ا + ی ا + ۶ لا - ۳ ی - ۱ = ۰

(۲) نقاط تقاطع دائرہ

ی ا + لا ا = ۲۵ اور خطوط

ی + لا = -۱ اور ی + لا = - ۵ اور ۳ ی + ۴ لا = -۲۵ کے دریافت کرو

(۳) ایک دائرہ مبدء مین گذرتا ہی اور اوسکی اندر لا اور ی محورون کی مثبت حصون مین سے طول ح اور ق طول کاٹتا ہین تو مساوات دائرہ کی دریافت کرو

(۴) ایک دائرہ نقاط (ح و ق) اور (ح َ و ق َ) مین گذرتا ہی تو ثابت کرو کہ اوسکا مرکز اس خط پر واقع ہوگا کہ (ح - ح َ) (لا - $\frac{ح + ح َ}{۲}$) + (ق - ق َ) (ی - $\frac{ق + ق َ}{۲}$) = ۰

(۵) نقاط (لا و ی) اور (لا َ و ی َ) مین جو خط ملے اوسکو قطر دائرہ بناکر اوسکی مساوات دریافت کرو

(۷) دو نقاط معین ا اور ب ہین اور ع ایک ایسا نقطہ ہے کہ ا ع = م ب ع کے ہی
ایسمین م ایک مقدار مستقل ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ع کا دائرہ ہی مگر جب م = ا کے ہو
تو اوس صورت مین دائرہ نہین ہوگا

(۸) ایک مساوات دریافت کرو کہ جسسے نقاط تقاطع خط

لا/ح + ی/ق − ۱ = ۰

اور دائرہ لا² + ی² − ۲ ط لا − ۲ ص ی = ۰ کے متعین ہوا کرین
اور اونمین ایسا ارتباط دریافت کرو کہ جسسے خط دائرہ کو مس کرے

(۹) مساوات مماس کی جو مبدء پر اس دائرہ

لا² + ی² − ۲ ی − ۳ لا = ۰ کے ہو دریافت کرو

(۱۰) ثابت کرو کہ طول وتر مشترک دوائر کا جنکی مساواتین یہہ ہین کہ

(لا − ط)² + (ی − ص)² = س² اور (لا − ص)² + (ی − ط)² = س² یہہ ہے کہ

√(۴ س² − ۲ (ط − ص)²)

(۱۱) مربع کے اندر ایک نقطہ اس طرح سے متحرک ہوتا ہے کہ اوسکی ضلعون سے نقطہ کے فاصلون کا مربع ایک
مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ اس نقطہ کا مقام النقاط دائرہ ہی

(۱۲) مثلث متساوی الاضلاع کی اندر ایک نقطہ اس طرح سی متحرک ہوتا ہی کہ اوسکی ضلعون سے
نقطہ کے فاصلون کے مربعون کا مجموعہ ایک مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط
اس نقطہ کا ایک دائرہ ہی

(۱۳) ایک نقطہ اس طرح حرکت کرتا ہی کہ نقاط معین سے اوسکی فاصلون کے مربعون کا مجموعہ ایک
مقدار مستقل رہتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط بھی اوس نقطہ کا دائرہ ہی۔

(۱۴) بتلاؤ کہ مساوات دائرہ کی کیا ہو جائیگی جب اول ایک ہی نقطہ محیط پر مبدا ہو اور محور ۳۰°
کے زاویہ پر مائل ہون اور جسسے اونکی دائرہ کی اندر ح اور ق واقع ہوتے ہون

(۱۵) محورون کا کس زاویہ پر میلان ہوگا جب مساوات

$لا^2 + ی^2 - لا ک - ح لا - ح ی = 0$ ایک دائرہ کو تعبیر کرتی ہو

تو مقام اور مقدار دائرہ کی دریافت کرو

(۱۷) مساوات دائرہ کی دریافت کرو جسکا مرکز مبدء پر ہو اور نصف قطر = ۳ اور محوروں کا میلان ۴۵ ہو

(۱۸) وہ دائرہ دریافت کرو جسکے مرکز کے محددین مین سے ہر ایک = $-\frac{1}{2}$ اور اوسکا نصف قطر = $\frac{1}{2}$ اور محور ۶۰ کے زاویہ پر مائل ہون

(۱۹) زاویہ د پر محور مائل ہین تو اس دائرہ $لا^2 + ی^2 + ۲ لا ی جم د - ح لا - ق ی = 0$ کا نصف قطر دریافت کرو

(۲۰) ثابت کرو کہ مساوات دائرہ کی جسکا نصف قطر س ہی اور محور اوسکی دو مماس ہین جو زاویہ د پر مائل رکھتی ہین یہہ ہی کہ

$$لا^2 + ی^2 + ۲ لا ی جم د - ۲ (لا + ی) س مم \frac{د}{2} + س^2 مم^2 \frac{د}{2} = 0$$

(۲۱) ثابت کرو کہ مثال بالا مین مساوات اسطرح بھی لکھی جاسکتی ہی کہ

$$لا + ی - ۲ \sqrt{(لا ی)} جب \frac{د}{2} = س مم \frac{د}{2}$$

(۲۲) قیمت س کی ایسا دریافت کرو کہ دائرے $(لا - ط)^2 + (ی - ص)^2 = س^2$ اور $(لا - ص)^2 + (ی - ط)^2 = ص^2$ ایک دوسرے کو مس کرین

(۲۳) اب س ایک مثلث متساوی الاضلاع ہی اور ا مبدء مقرر کیا گیا ہی اور اب محور لا کا قائم الزاویہ ہی مساوات دائرہ کی جو نقاط ا و ب و س پر گذری دریافت کرو اور اوسے قطبی مساوات اس دائرہ کی دریافت کرو

(۲۴) اگر مرکز دائرہ کا قطب ہو تو ثابت کرو کہ مساوات وتر دائرہ کی جسکی محاذی مرکز پر زاویہ ۲ ب ہی یہہ ہے

$$نق = س جم ب جم (ر - ھ)$$

اسمین زاویہ درمیان مقام ابتدای اور اوس خط کے واقع ہی جو مرکز سے کھینچا گیا وتر کی تنصیف کرتا ہی ایسے ایک نقطہ معلوم پر جو خط دائرہ کو مس کرتا ہی اوسکی مساوات قطبیہ استنباط کرو

(۲۵) مساوات قطبیہ اوس دائرہ کی دریافت کرو جسکا مبدء محیط پر ہو اور مقام ابتدای مماس ہو اور ثابت کرو کہ موافق اس مبدء اور مقام ابتدائی کے مساوات قطبیہ مماس کی نقطہ ر پر یہہ ہی کہ

$$نق جب (۲ ر - ر) = ۲ س جب^2 ر$$

(۲۶) ثابت کرو کہ اگر مبدء محیط دائرہ پر واقع ہو اور اس نقطہ سے قطر نکالا گیا مقام ابتدائی پر زاویہ ھ بنائے تو مساوات دائرہ کی یہہ ہوگی $نق = ۲ س جم (ر - ھ)$

(۲۷) مقام التقاط مساوات نق = ا جم (ر - هـ) + ب جم (ر - ب) + س جم (ر - ر) معلوم کرو

(۲۸) اب ایک خط مستقیم معلوم ہے اور ایسے دو خط غیر محدود اب کے ساتھہ یکسان میل رکھتے ہوئے کھینچے گئے ہین اور دائرہ جو ا اور ب مین گذرتا ہی ان خطوط کو ل اور م پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر ل اور م مخالف سمتون مین اب کے واقع ہین تو مجموعہ ا ل او ا م کا برابر ایک مقدار مستقل کے ہوگا اور اگر ل اور م ایک سمت مین واقع ہین تو حاصل تفریق ا ل اور ا م کا برابر ایک مقدار مستقل کے ہوگا

(۲۹) اب س مثلث متساوی الاضلاع ہی اور ع ا = ع ب + ع س تو مقام التقاط ع کا دریافت کرو

(۳۰) ن خطوط مستقیمہ معلومہ ہین اور وہ ایک خط قائم کے ساتھہ زاویے هـ و ب و س ا وغیرہ پیدا کرتے ہین اور ع ایک نقطہ ایسا لیا گیا ہی کہ مجموعہ اون عمودون کے مربعون کا جو اوس نقطہ سے ان خطوط پر نکالے جائین ایک مقدار مستقل ہے تو بتاؤ کیا شرط ہونی چاہئے کہ مقام التقاط ع کا ایک دائرہ ہو

(۳۱) ایک نقطہ ایک سطح مین متحرک ہوتا ہی کہ ضلاع کثیر الاضلاع منتظم سی اوسکی فاصلون کے مربعون کا مجموعہ ایک مقدار مستقل ہوتی ہی تو ثابت کرو کہ مقام التقاط اوس نقطہ کا دائرہ ہی

(۳۲) ایک خط ایک سطح مین متحرک ہوتا ہی کہ مجموعہ عمودون ا ع اور ب ق کا نقاط قائم ا اور ب سی اوسپر گرائے گئے ایک مقدار مستقل ہے تو ع ق کے نقطہ وسط کا مقام التقاط دریافت کرو

(۳۳) نقطہ قائم ط سے خط کھینچا گیا دائرہ قائم سے نقطہ ع پر ملتا ہی اور ط ع مین ایک نقطہ ق ایسا مقرر کیا گیا ہے کہ ط ع . ط ق = ک ک تو مقام التقاط ق کا دریافت کرو

(۳۵) ثابت کرو کہ مساوات (ح ی - ق لا)^۲ = س^۲ {(لا - ح)^۲ + (ی - ق)^۲} دائرہ لا^۲ + ی^۲ = س^۲ کے دو مماسون کو تعبیر کرتی ہی اور یہہ دائرہ نقطہ (ح و ق) پر گذرتا ہی

(۳۶) اس مساوات سے کیا تعبیر ہوتا ہے نق^۲ - نق ط جم ۲ ر قطار - ۲ ط^۲ = ۰

(۳۷) مساوات قطبیہ ایک دائرہ کی ہی کہ نق = ۲ س جم ر تو ثابت کرو کہ مساوات ۲ س جم ب جم هـ = نق جم (ب + هـ - ر) ایک ایسی وتر کو تعبیر کرتی ہی کہ اگر اوسکے اطراف مین قطب سے نصف قطر ملائی جائین تو وہ زاویے هـ و ب مقام ابتدای کے ساتھہ بناتے ہین

(۳۸) ایک دائرہ کے مماس جو نقاط ع اور ق سے نکالین نقطہ ت پر ملتے ہین اگر ان نقطون

اور قطر کے طرفین مین خطوط ملائے جائین اور وہ ایک دوسرے قطر کو جو پہلے قطر پر عمود ہی نقاط
عَ و قَ و تَ پر قطع کرین تو ثابت کرو عَ بَ = قَ بَ

# باب ہفتم
## محوران اصلی

(۱۰۸) ہم نے ثابت کیا ہے کہ مساوات دائرہ کی یہہ ہے کہ
(لد - ط)^۲ + (ی - ص)^۲ - س^۲ = ۰
اب ہم اسکو اختصاراً خص = ۰ لکھینگے

**اول** اگر (لد ی) محیط دائرہ پر نہون تو خص برابر صفر کے نہین ہوگا
ہم اس صورت مین خص کے معنی ہندسیہ بیان کرینگے

اول فرض کرو کہ (لد ی) دائرہ سے باہر واقع ہین (لد ی) سے ایک مماس دائرہ کا کہیچو
اور نقطہ تماس اور مرکز (ط و ص) دائرہ مین خط ملاو اور نیز (لد ی) اور (ط و ص) مین خط ملاؤ
فرض کرو کہ م تعبیر (ط و ص) کو کرتا ہی اور ق نقطہ (لد ی) کو ت نقطہ تماس مماس کا ہی کہ
پس ہمنے ایک مثلث قائم الزاویہ بنالیا ہی اور چونکہ (لد - ط)^۲ + (ی - ص)^۲ = ق س^۲ اسے معلوم ہوتا ہے
خص = ق ت^۲ یعنی خص مربع مماس کو تعبیر کرتا ہی جو (لد ی) سے دائرہ کا نکالا جائے - لیکن بحکم
(۳۶ش ۳م) اقلیدس کے مربع مماس کا برابر ہوتا ہے اوس خط کے حصون کی سطح کے جو نقطہ
(لد ی) سے کہیچا جائے اور دائرہ اوسکے حصے بنائے تو اس سطح کو بہی خص تعبیر کریگا

دوم اگر (لد ی) دائرہ کے اندر ہی تو خص منفی ہوگا - فرضکرو کہ م اور ق سے وہی مراد ہے
جو پہلی تہی - اور س ق کو خارج کرو کہ دائرہ سے ت اور تَ پر ملے تو
- خص = س ت^۲ - س ق^۲ = (س ت + س ق) (س ت - س ق)
= تَ ق . ت ق

اسسے معلوم ہوا کہ بحکم (۳۵ش ۳م) اقلیدس کے اگر کوئی خط ق عَ دائرہ سے ع اور عَ پر ملتا ہوا
کہیچا جائے تو قیمت سطح ع ق اور عَ ق کی - خص ہے

(۱۰۹) فرض کرو کہ خص تعبیر (لد - ط)^۲ + (ی - ص)^۲ - س^۲ کو کرتا ہی اور

خص تعبیر $(\text{لا}-\text{ط})^2+(\text{ی}-\text{ص})^2-\text{س}^2$ کو کرتا ہے

تو خص = ۰ (۱) اور خصَ = ۰ (۲)

مساواتین دو دائرون کی ہین اب معنی اس مساوات کے بیان کرتے ہین کہ

خص − خصَ = ۰ (۳)

خص − خصَ مین لا اور ی کی اول قوت ہی اسواسطے خص − خصَ = ۰ کسی خط مستقیم کی مساوات کو تعبیر کرتا ہے اور نیز اگر لا و ی ایسی دریافت کئے جائین کہ جنسے ایک ہی وقت مین مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط پوری ہون تو وہ مساوات (۳) کی شرائط کو بھی پورا کرینگی − اسسے ثابت ہوا کہ دائرے جو (۱) اور (۲) سے تعبیر ہوتے ہین آپسمین تقاطع کرین تو (۳) اوس خط کی مساوات کو تعبیر کریگا جو نقاط تقاطع مین ملائین

اور نیز فرض کرو کہ کسی نقطہ (۳) مین سے جو دونو دائرون سے باہر واقع ہو مماس (۱) اور (۲) کے کھیچین تو موجب دفعہ ۱۰۸ کے ان مماسون کا طول آپسمین برابر ہوگا − پس اسسے معلوم ہوا کہ خواہ (۱) اور (۲) تقاطع کرین یا نہ کرین خط (۳) کی یہہ خاصیت ہی کہ اگر اوسکی کسی نقطہ سے خطوط دونو دائرون کو مس کرتے ہوئے کھیچے جائین تو طول ان خطوط کا آپسمین برابر ہوگا

(۱۱۰) کوئی مساوات اس شکل کی

$$\text{ا}(\text{لا}^2+\text{ی}^2)+\text{ب لا}+\text{س ی}+\text{د}=0$$

ایک دائرہ کو تعبیر کریگی اسلئے کہ جب ا پر مساوات کو تقسیم کرین تو مساوات کی صورت ایسی بنجائیگی جیسی معمولی صورت مساوات دائرہ کی ہوا کرتی ہی

جب $\text{لا}^2$ اور $\text{ی}^2$ کا واحد ہو تو مساوات دائرہ کی صورت نہایت سادی ہوتی ہی

حد اگر خص = ۰ اور خصَ = ۰ دو دائرون کی سادی مساواتین ہون تو خط خص − خصَ = ۰ کو محور اصلی دائرہ کا کہتے ہین

یہان محور جو قائم الزاویہ اور منحرف دونو ہوسکتے ہین

اب یہہ تعریف علم ہندسہ کے موافق سنو − ایک خط مستقیم ایسا ہمیشہ دریافت ہوسکتا ہی

کہ اگر اوسکے کسی نقطہ سے مماس دو دوائر معلوم کے نکالین تو وہ آپسمین برابر ہون اس خط کو محور اصلی دائرون کا کہینگے

(۱۱۱) اصلی محور تین معلوم دائرون کے ایک نقطہ پر ملتے ہین

فرض کرو کہ مساواتین معلوم دائرون کے یہہ ہون کہ

$$\text{خص}_1 = 0 \ldots (1) \quad \text{خص}_2 = 0 \ldots (2) \quad \text{اور} \quad \text{خص}_3 = 0 \quad (3)$$

تو مساواتین اصلی محورون کی یہہ ہونگین

$\text{خص}_1 - \text{خص}_2 = 0$ (۱) اور (۲) سے متعلق ہے

$\text{خص}_2 - \text{خص}_3 = 0$ (۲) اور (۳) سے متعلق ہے

$\text{خص}_3 - \text{خص}_1 = 0$ (۳) اور (۱) سے متعلق ہے

تینون خط ایک نقطہ پر ملتے ہین اسلئے کہ یہہ بات ظاہر ہی کہ قیمتین لا اور ی کی جو دو مساواتون کی شرایط کو ایک وقت مین پورا کرینگی وہ تیسری مساوات کی شرایط کو بھی پورا کرینگی

(۱۱۲) دفعات گذشتہ کی بہت سی نتایج خاص خاص صورتون مین نکلتے ہین مگر ہم بعض اونمین سے دو دائرون کے محور اصلی کے باب مین بیان کرینگے

(۱۱۳) محور اصلی عمود اوس خط پر ہوتا ہی جو دائرون کے مرکزون مین ملائین — فرضکرو کہ مساواتین دائرون کی یہہ ہون کہ

$$(\text{لا} - \text{ط})^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2 - \text{س}^2 = 0$$

$$(\text{لا} - \text{ط}')^2 + (\text{ی} - \text{ص}')^2 - \text{س}'^2 = 0$$

تو مساوات محور اصلی کی یہہ ہوگی کہ

$$(\text{لا} - \text{ط})^2 - (\text{لا} - \text{ط}')^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2 + (\text{ی} - \text{ص}')^2 - \text{س}^2 + \text{س}'^2 = 0 \quad \text{یعنی}$$

$$\text{لا}(\text{ط}' - \text{ط}) + \text{ی}(\text{ص}' - \text{ص}) + \tfrac{1}{2}(\text{ط}^2 - \text{ط}'^2 + \text{ص}^2 - \text{ص}'^2 - \text{س}^2 + \text{س}'^2) = 0 \quad (1)$$

اور مساوات خط کی جو مرکزون مین ملائین بموجب دفعہ ۳ کے یہہ ہو گی کہ

$$\text{ی} - \text{ص} = \frac{\text{ص}' - \text{ص}}{\text{ط}' - \text{ط}}(\text{لا} - \text{ط}) \ldots (2)$$

پس بموجب دفعہ ۲۸ کے (۱) اور (۲) ایک دوسرے کے ساتھہ زاویہ قائمہ بناتے ہین

(۱۱۴) جب دو دائرے آپسمین مس کرین تو اونکا مماس مشترک نقطہ تماس پر محور اصلی دائرون کا ہوگا اسواسطے کہ محور اصلی نقطہ تماس پر عمود اون خطون پر ہے جو مرکزون مین ملایا جاے

(۱۱۵) فرضکرو کہ نصف قطر ایک دائرہ کا لا انتہا چھوٹا ہو جاے یعنی دائرہ ایک نقطہ بنجاے تو محور اصلی کی یہہ خاصیت ہوگی کہ محور اصلی کے کسی نقطہ سے ہم خط نقطہ معلوم تک کھینچین اور مماس دائرہ معلوم کا نکالین تو خط اور مماس باعتبار طول کے آپسمین برابر ہونگے

(۱۱۶) محور اصلی ایک نقطہ اور دائرہ کا دائرہ سی باہر واقع ہوتا ہے خواہ نقطہ دائرہ کے اندر ہو خواہ باہر اسواسطے کہ اگر محور اصلی دائرہ سے ملے تو محددین نقاط تقاطع کے مساوات نقطہ اور مساوات دائرہ دونون کی شرائط کو پورا کرینگی لیکن مساوات نقطہ کی شرائط سوا اوس نقطہ کے محددین کے کسی اور نقطہ کے محددین سے پوری نہین ہو سکتین ہے ثابت ہوا کہ محور اصلی دائرہ سے نہین مل سکتا اور اگر نقطہ محیط دائرہ پر ہو تو محور اصلی مماس اوس نقطہ پر دائرہ کا ہوگا

(۱۱۷) فرض کرو کہ دو نو دائرے نقطے بنجائین تو محور اصلی کے کسی نقطہ سے قائم نقطون تک خطوط کھیچے گئے طول مین آپسمین برابر ہونگے — اسے معلوم ہوا کہ محور اصلی دو نقاط معلوم کا وہ خط ہوتا ہے جو نقاط معلوم کے درمیانی فاصلہ کے قائمی زاویون پر تنصیف کرتا ہی

(۱۱۸) فرض کرو کہ دفعہ ۱۱۱ مین ہر ایک دائرہ ایک نقطہ ہو جاے تو اوسمین جو دعوی ثابت ہوی اوسکی یہہ صورت ہو جائیگی کہ عمود جو اضلاع مثلث کے نقاط وسط سے اونپر نکالے جای ایک نقطہ پر ملینگے

(۱۱۹) علم ہندسہ کا یہہ ایک مشہور سوال ہے کہ ایک خط مستقیم دو معلوم دائرون کو مس کرتا ہوا کھیچو اگر دائرے آپسمین تقاطع نکرین تو چار مماس مشترک کھیچی جاسکتے ہین اور دو اونمین سے برابر میل اوس خط کے ساتھہ رکھینگے جو اونکے مرکزون مین ملایا جاے اور اس خط کو دائرون کے مابین وہ مماس قطع کرینگے اور باقی دو مماس بھی اس خط کے ساتھہ یکسان میل رکھینگے مگر چھوٹے دائرہ سے پرے اس خط سے وہ ملینگے — ان دو نقاط تقاطع کو مرکز نا مشابہت کہتے ہین

## قطب اور قطبی

(۲۰) حد اگر مساوات دائرہ کی یہہ ہو کہ

لا ا + ی ا = س ۲

اور ح اور ق کسی نقطہ کے محددین ہوں تو

لا ح + ی ق = س ۲ کو قطبی خط نقطہ (ح و ق) کا اور نقطہ (ح و ق) کو قطب خط لا ح + ی ق = س ۲ کا بلحاظ دائرہ معلوم کے کہینگے اور اس حد کو ہم اسطرح سے بھی بیان کر سکتے ہین - ایک نقطہ معلوم کا قطبی خط مستقیم باعتبار دائرہ معلوم کے وہ خط مستقیم کہلاتا ہے جسکی مساوات مین محددین اوس نقطہ معلوم کے اسطرح ملتف ہوں جس طرح کہ مساوات مماس دائرہ مین اوسکے نقطہ تماس کے محددین ملتف ہوتی ہین - نقطہ معلوم اوس خط کا قطب کہلاتا ہی

اس حد سے ہم مغالطہ مین پڑ سکتی ہین اسلیے کہ مساوات مماس دائرہ جو نقطہ معلوم پر سے کر مختلف صورتون مین بیان ہوسکتی ہی اور سبب اس اختلاف کا یہہ ہی کہ نقطہ معلوم کے محددین سے سبب مساوات دائرہ کے مختلف طرح سے مربوط ہوتے ہین مثلاً مماس کی مساوات محددین مین سے ایک کے اندر بیان ہوسکتی ہی لیکن اوپر کی حد مین مماس کی اوسی مساوات سی ہماری مراد ہی جسمین بالطبع نقطہ معلوم کے محددین عقلاً ملتف ہوتی ہین

نقطہ معلوم کی خط قطبی کی جو صفت خاصیت دفعہ ۱۰۳ مین بیان ہوئی ہی اوسکی موافق تعریف اوسکی یہہ کر سکتے ہین کہ ایک نقطہ معلوم کا باعتبار دائرہ معلوم کی وہ خط مستقیم قطبی ہی جو مقام التقاطع اون مماسون کے نقطہ تقاطع کا ہی جو اون وترون کے اطراف سی نکالے جائین جو اوس نقطہ معلوم سے کہیچے جائین اور اس نقطہ معلوم کو قطب اوس خط کا کہتے ہین

اگر نقطہ معلوم باہر دائرہ سی واقع ہو تو اوسکا قطبی خط منطبق اون مماسون کے وتر تماس پر ہو جائیگا جو اوس نقطہ سے دائرہ کے کہیچین

(۱۲۱) اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے قطب مین گذرے تو دوسرا خط مستقیم پہلے خط مستقیم کے قطب مین گذریگا

فرض کرو کہ لا و ی قطب اول خط مستقیم کے ہو تو

لا لا + ی ی = س^۲ ——— (۱)

مساوات اول خط کی ہوگی

فرض کرو کہ (لاَ و یَ) قطب دوسرے خط مستقیم کا ہو تو

لا لاَ + ی یَ = س^۲ ——— (۲)

مساوات دوسرے خط مستقیم کی ہوگی

چونکہ اول مساوات (لاَ و یَ) پر گذرتی ہی اسلئے

لا لاَ + یَ ی = س^۲

چونکہ یہہ مساوات صحیح ہی اسلئے (۲) (لا و ی) پر گذرتی ہی

(۲۲) نقطہ تقاطع دو خطوط مستقیم کا قطب اوس خط مستقیم کا ہی جو اون خطوط کے قطبون کو ملاتا ہے
ا اور ب سے اون دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرو اور جو خط اون کے قطبون مین ملائین اوسے س سے
تعبیر کرو چونکہ س قطب آ مین گذرتا ہی اسواسطے بموجب دفعہ ۲۱ کے آ قطب س پر گذرتا ہے
اور علی ہذا القیاس ب قطب س پر گذرتا ہی اسلئے نقطہ تقاطع ا اور ب کا قطب س کا ہی

## امثال متفرقہ

(۱) مماس اوس زاویہ کا دریافت کرو جو درمیان اون دو خطوط مستقیم کے واقع ہی جنکے درمیانی
محورون کے طول اور طول جداگانہ ہین

(۲) اگر خط مستقیم جو اس مساوات سے تعبیر ہوتا ہے کہ
کہ لا (س^۲ ر + حم^۲ ر) − ۲ لا ی س ر + ی^۲ جب ر = ۰ زاویہ ہ اور ب محور لا سے بناتا ہے
تو ثابت کرو کہ س ہ ـ س ب = ۲

(۳) مربع کا ایک کونہ مبدء پر ہی اوسکا ایک ضلع زاویہ ھ محور لا سے بناتا ہے
تو مساوات اوسکی چارون ضلعون اور دو نو قطرون کی دریافت کرو

(۴) ایک متوازی الاضلاع ان خطوں سے بنتی ہے جنکی مساواتین یہہ ہین کہ

لا/ط + ی/ص = ۱ ، لا/ط + ی/ص = ۲

لا/ص + ی/ط = ۱ ، لا/ص + ی/ط = ۲

تو ثابت کرو کہ یہہ ضلعے ایک دوسرے کے ساتھہ زاوئے قائمی بناتے ہین

(۵) بُعد نقطہ (لا۱ و ی۱) کا دو خطوط مستقیم سے جو مبدء محددین پر گذرتا ہی ساہی تو ثابت کرو کہ دونو اس مساوات سی تعبیر ہونگی کہ

(لا ی۱ − لا۱ ی)^۲ = (لا^۲ + ی^۲) ر^۲

(۶) وہ شرط دریافت کرو کہ جنکے موافق خطوط تعبیر کی گئی

ا ی^۲ + ب لا ی + س لا^۲ = ۰

سے منطبق اون خطون پر ہون جو اس مساوات سے تعبیر کئے جائین .

اَ ی^۲ + بَ لا ی + سَ لا^۲ = ۰

(۷) اگر ھہ = ۰ اور ب = ۰ اور س = ۰ مثلث کے تینوں ضلعون کی مساواتین ہون اور ط و ص و س عمودی فاصلے درمیان اس مثلث کے اضلاع اور ایک اور دوسرے مثلث کے اضلاع ہون اور ان مثلثون کے ضلعے آپسمین متوازی ہی ہون تو خط جو اونکے دوائر اندرونی کے مرکزون مین وصل کیا جاوے وہ ان مساواتون مین سی کسی ایک سی تعبیر ہوگا

(ط − ب)/(ط − ص) = (ب − س)/(ص − س) = (س − ھہ)/(س − ط)

(۸) ثابت کرو کہ مساوات خط مستقیم کی جو نقطہ وسط ضلع ب س مثلث ا ب س مین گذرتا ہے اور متوازی خارجی تضعیف کرنے والے زاویہ ا کا ہے یہہ ہے کہ

ب + س + ھہ (جب ب + جب س) = ۰

(۹) مساوات خط کی جو متوازی ب س کا مرکز دائرہ خارجی سے کہ ب س کو چھوتا ہی نکالا جائے تو اوسکے مساوات یہہ ہوگی کہ

(ھہ + ب) جب ب + (ھہ + س) جب س = ۰

(۱۱۰) مساواتین اون خطون کی دریافت کرو جو ان خطوط کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہی جنکی مساواتین یہہ ہین ل ھ + م ب + ن س = ۰ اور لَ ھ + مَ ب + نَ س = ۰ اور اونکے درمیانی زاویون کی تنصیف کرتی ہین

(۱۱۱) اگر ی = ۰ اور یو = ۰ مساواتین دو دائرونکی ہون تو ثابت کرو کہ مناسب قیمت مقدار مستقل [illegible] کے مقرر کرنے سے مساوات ی + مح یو = ۰ اوس دائرہ کو تعبیر کریگی جو اون دائرون کے نقاط تقاطع سے گذرتا ہے

(۱۱۲) ایک دائرہ قائم کو ایک سلسلہ دائرون کا قطع کرتا ہی اور اون مین سے ہر ایک دو نقطون مین [illegible] تو ثابت کرو کہ خطوط جو نقاط تقاطع دائرہ قائم اور سلسلہ دوائر مین سے ہر ایک دائرہ کی گذرینگی ایک نقطہ [illegible]

# باب ہشتم

## قریب البیضوی

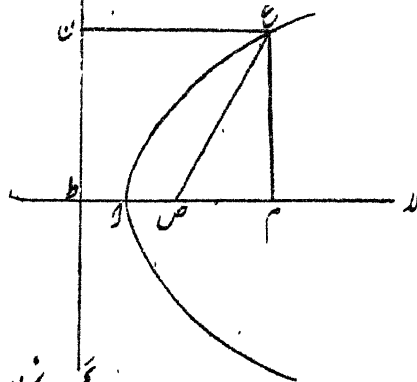
(۱۲۳) تین خطوط منحنی کے ہم حدود بیان کرینگے اور پہر ان حدود سے قوانین اونکی مستنبط کرینگے اور بعد ازان ان مساواتون سے اونکی بعض خواص کی تحقیقات کرینگے

**حد** تراش مخروطی مقام انتقال اوس نقطہ کا ہوتا ہی جو متحرک اسطرح ہوتا ہی کہ نقطہ قائم اور خط قائم سے اوسکے فاصلون مین ہمیشہ ایک نسبت مستقل رہتی ہی اگر یہہ نسبت متساوی واحد کے ہو تو خط منحنی کو قریب البیضوی کہتے ہین اور اگر کم واحد سے ہو تو بیضوی اور اگر زائد واحد سے ہو تو بعید البیضوی

نقطہ قائم کو نقطہ ماسکہ اور خط قائم کو خط منتظم یا فقط منتظم کہتے ہین

(۱۲۴) ہم پیچھے اس بات کو دکہلادینگے کہ اگر مخروط کو کوئی سطح مستوی قطع کرے تو تقاطع کا خط کیا تو قریب البیضوی ہوگا یا بیضوی یا بعید البیضوی یا دائرہ یا دو خط یا ایک نقطہ۔ اسیلیے ان قریب البیضوی اور بیضوی اور بعید البیضوی کو تراش یا قطعہ مخروطی کہتے ہین اور اونمین دائرہ اور دو خط مستقیم اور ایک خط مستقیم اور نقطہ بہی شامل ہین اور موافق ان معنی کے ہم یہہ بہی ثابت کرینگے کہ ہر خط منحنی درجہ دوم کا تراش مخروطی ہوتا ہی بالفعل دفعہ ۱۲۳ کے حدود پر فقط توجہ تام چاہیے اور اوسکے نتائج اہم بیان کرتے ہین

(۱۲۵) مساوات قریب البضوی کی دریافت کرو

قریب البضوی مقام النقاط اوس نقطہ کا ہی کہ جسکا فاصلہ نقطۂ قائم سے اور ایک خط مستقیم قائم سے باہم برابر ہوں

فرض کرو کہ نقطۂ قائم ص ہو اور ی ی خط قائم ــ ص ط عمود ی ی پر نکالو اور ط کو مبدء مانو اور ط ص کو سمت محور لا کی اور ط ی کو محور ی کی سمت قرار دو اور فرض کرو کہ ط ص = ۲ ط

اور ع کوئی نقطہ مقام النقاط میں ہی ملاؤ ص ع اور ع م متوازی ط ی کا اور ع ن متوازی ط لا کا نکالو اور فرض کرو کہ ط م = لا اور ع م = ی

پس بموجب حدود کے ص ع = ع ن

∴ ص ع۲ = ع ن۲

∴ ع م۲ + ص م۲ = ع ن۲

یعنی ی۲ + (لا − ۲ ط)۲ = لا۲

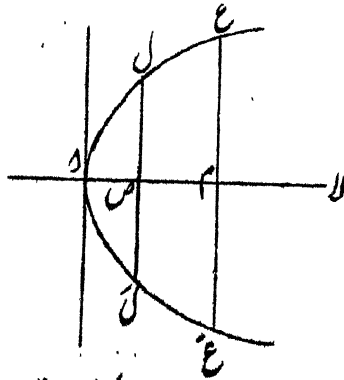
ی۲ = ۴ ط (لا − ط) . . . (۱)

یہہ مساوات قریب البضوی کی . . موافق مبدء اور محور مفروضہ کے ہے

خط منحنی محور لا کو نقطہ ا پر قطع کرتا ہی اور یہہ نقطہ ا ط ص کی تضعیف کرتا ہی اسواسطی جس وقت ی = . مساوات (۱) میں ہو تو لا = ط مساوات کی صورت نہایت سادی ہو جائیگی اگر ہم ا کو مبدء قرار دیں ــ فرض کرو کہ لا َ = ا م اور لا َ = لا − ط تو مساوات (۱) یہہ ہو جائیگی کہ ی۲ = ۴ ط لا َ

ہم زیر کو لا پر سے اسقاط کر سکتے ہیں اگر یہہ یاد رکہیں کہ مبدء ا ہی پس مساوات قریب البضوی کی یہہ حاصل ہوگی

ی۲ = ۴ ط لا . . . (۲)

(۱۲۶) مساوات ی² = ۴ ط لا سے قریب البضوی کو مرتسم کرو

اس مساوات سے یہہ ظاہر ہے کہ لا کی ہر مثبت قیمت کے واسطے ی کی دو قیمتین ہین جو مقدار مین مساوی ہین اور علامت مین مخالف — پس اس سے معلوم ہوا کہ ہر نقطہ ع کے مقابل مین محور لا کی دوسری طرف ایک اور نقطہ عَ ایسا ہوگا کہ ع م = عَ م — اس سے معلوم ہوا کہ بلحاظ محور لا کی خط منحنی مین ایک قرینہ پایا جاتا ہی لا کی منفی قیمتون کے موافق ی کی قیمتین نہین ہو سکتین اس سے معلوم ہوا کہ خط منحنی کا کوئی حصہ ا کی جانب چپ مین نہین واقع ہی چونکہ لا کی ہر مثبت قیمت ہو سکتی ہی اسلیے خط منحنی لا انتہا دائین طرف مبدء کی پہیل سکتا ہی — ا کو راس خط منحنی کا اور ا لا کو محور منحنی کا کہتے ہین

(۱۲۷) ہم نے مجوف طرف خط منحنی کے محور لا کی طرف کہچی ہی اسطرح سی شکل کو مرتسم کرنا اس مقصد کے ثابت کرنے سے صحیح ہو جائیگا کہ خط منحنی کے کسی نقطہ کا محدد جو درمیان راس اور نقطہ معین کے واقع ہی بڑا ہوتا ہے بہ نسبت محدد اوس خط مستقیم کے جو راس اور نقطہ معین مین ملایا جائے —

فرض کرو کہ ع ایک نقطہ معین ہے اور لاَ و یَ اوسکے محددین ہین تو مساوات لاع کی یہہ ہے کہ ی = یَ/لاَ لا = ۲ (۴ط/لاَ)^½ . لا کیونکہ یَ² = ۴ ط لاَ فرض کرو کہ لا محدد بہ نسبت لاَ کے کم ہے چونکہ خط منحنی کا معین ۲ ✓۴ط لا ہے اور خط مستقیم کا معین ۲ (۴ط/لاَ)^½ . لا یا ۲ (لا/لاَ)^½ ✓۴ط لا

پس ظاہر ہے کہ معین خط منحنی کا بڑا خط مستقیم کے معین سے ہے اسی سبب سے خط منحنی کو مجوف محور لا کی طرف بنایا ہے

(۱۲۸) لقطہ تراش مخروطی کے نقطہ ماسکہ مین جو معین گذرتا ہی اوسکا دو چند عرض مستقیم خط منحنی کا کہلاتا ہی — دفعہ ۱۲۶ کی شکل مین ل ص ل' عرض مستقیم ہی —

فرض کرو کہ لا = ط تو اس مساوات $\text{ی}^2 = \text{۴ط لا}$ سے

$\text{ی} = \pm \text{۲ط}$ اسسے ثابت ہوا کہ ل ص = ل'ص = ۲ط اور ل ل' = ۴ط

(۱۲۹) بعد ماسکہ کو قریب البضوی کی کسی نقطہ کے محدد کی رقمون مین بیان کرو

خط منحنی کے کسی نقطہ کا بعد ماسکہ سے برابر ہوتا ہی اوس بعد کے جو وہ نقطہ خط منتظم سے رکہتا ہی

شکل دفعہ ۱۲۵ کی دیکہو تو معلوم ہوگا کہ

$$\text{ص ع} = \text{ا م} + \text{ا ص}$$
$$= \text{لا} + \text{ط}$$

مماس اور عمود المماس قریب البضوی

(۱۳۱) قریب البضوی کے کسی نقطہ کے مماس کی مساوات دریافت کرو (حد دفعہ ۹۰ کی دیکہو)

فرض کرو کہ دو متصل نقطے خط منحنی پر ہین اور اونمین سے ایک نقطہ کے محددین لا' اور ی' اور دوسرے نقطہ کے محددین لا'' و ی'' ہین تو مساوات خط قاطع کی جو ان نقطون پر گذرتا ہی یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'} (\text{لا} - \text{لا}') \quad . \; . \; . \; . \; (۱)$$

چونکہ (لا' و ی') اور (لا'' و ی'') قریب البضوی پر ہین

$$\text{ی}'^2 = \text{۴ط لا}' \quad \text{اور} \quad \text{ی}''^2 = \text{۴ط لا}''$$
$$\therefore \text{ی}''^2 - \text{ی}'^2 = \text{۴ط} (\text{لا}'' - \text{لا}')$$
$$\therefore \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'} = \frac{\text{۴ط}}{\text{ی}'' + \text{ی}'}$$

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات (۱) اسطرح لکہی جاسکتی ہے

$$\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{۴ط}}{\text{ی}'' + \text{ی}'} (\text{لا} - \text{لا}')$$

لیکن اب اپنی حد مین ی'' = ی' اسسے معلوم ہوا کہ مساوات مماس کی نقطہ (لا' ی') پر یہہ ہوگی

کہ $\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{۲ط}}{\text{ی}'} (\text{لا} - \text{لا}') \quad (۲)$

اور یہہ مساوات سادی اسطرح بن سکتی ہے کہ ی' مین ضرب دو تو

$$\text{ی ی}' = \text{۲ط} (\text{لا} - \text{لا}') + \text{ی}'^2$$
$$= \text{۲ط لا} - \text{۲ط لا}' + \text{۴ط لا}'$$
$$= \text{۲ط} (\text{لا} + \text{لا}') \quad . \; . \; . \; . \; . \; (۳)$$

(۱۳۱) مساوات مماس کی نہایت آسانی سے اوس زاویہ کے مماس کی رموز مین بیان ہوسکتی ہے جو یہہ خط محور سے بناتا ہے

اسواسطے کہ مساوات مماس کی ( لہَ و یَ ) پر

$$\text{ی یَ} = \text{۲ط} \left( \text{لہ} + \text{لہَ} \right)$$

$$\text{ی} = \frac{\text{۲ط}}{\text{یَ}}\,\text{لہ} + \frac{\text{۲ط لہَ}}{\text{یَ}}$$

$$= \frac{\text{۲ط}}{\text{یَ}}\,\text{لہ} + \frac{\text{۴ط لہَ}}{\text{۲یَ}}$$

$$= \frac{\text{۲ط}}{\text{یَ}}\,\text{لہ} + \frac{\text{یَ}}{\text{۲}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۱})$$

فرض کرو کہ $\frac{\text{۲ط}}{\text{یَ}} = \text{م} \quad \therefore \frac{\text{یَ}}{\text{۲}} = \frac{\text{ط}}{\text{م}}$

پس (۱) اسطرح لکھی جاتی ہے کہ

$$\text{ی} = \text{م لہ} + \frac{\text{ط}}{\text{م}} \quad \ldots\ldots \quad (\text{۲})$$

یہہ مساوات مطلوبہ ہے - بالعکس اسکے جس مساوات کی یہہ شکل ہی وہ مماس قریب البضوی کا ہی

(۱۳۲) دفعہ ۹۳ کی طرح یہہ بات یہان بہی بتلائی جاسکتی ہی کہ قریب البضوی کا مماس ایک نقطہ پر اوسے ملتا ہی اور نیز اگر ایک خط قریب البضوی سے ایک نقطہ پر ملتا ہی تو وہ اوس نقطہ پر اکثر مماس ہوگا .

اسواسطے کہ فرض کرو کہ $\text{یٰ}^{\text{۲}} = \text{۴ط لہ} \quad (\text{۱})$

یہہ مساوات قریب البضوی کے ہے

اور $\text{ی} = \text{م لہ} + \text{س}$ (۲) مساوات خط مستقیم کی ہے اور نقاط تقاطع کے محدد کے دریافت کرنیکے واسطے یہہ مساوات ہوگی

$$\left( \text{م لہ} + \text{س} \right)^{\text{۲}} = \text{۴ط لہ}$$

$$\text{یا}\ \text{م}^{\text{۲}}\,\text{لہ}^{\text{۲}} + \left( \text{۲م س} - \text{۴ط} \right) \text{لہ} + \text{س}^{\text{۲}} = \text{۰} \quad (\text{۳})$$

اس مساوات درجہ دوم کی دو قیمتین ہین مگر یہہ صورت مستثنی ہے کہ $\left( \text{۲م س} - \text{۴ط} \right)^{\text{۲}} = \text{۴م}^{\text{۲}}\,\text{س}^{\text{۲}}$

یعنی جب $\text{س} = \frac{\text{ط}}{\text{م}}$

اسسے معلوم ہوا کہ خط (۲) اگر قریب البضوی سے ملتا ہی تو وہ دو نقطہ پر ملتا ہی مگر اوس

صورت مین نہین کہ س = $\frac{ط}{م}$ اور اس صورت مین دفعہ (۳) کے موافق وہ مماس قریب البضوی کا ہی لیکن اگر مساوات (۲) اس صورت کی ہو کہ ی = س تو خط محور لا کا متوازی ہوگا تو بجای (۳) کے ہمکو یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ س = ۴ ط لا اور اسکی ایک قیمت ہی اسسے معلوم ہوا کہ خط متوازی محور قریب البضوی کا اوسے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہے، لیکن وہ مماس اوسکا نہین ہے

(۱۴۳) خط منحنی کے راس پر محور ی مماس ہوتا ہی اسواسطے کہ مساوات مماس کی (لا و ی) پر یہہ ہے

$$ی ی' = ۲ ط (لا + لا')$$

جب لا' = ۰ اور ی' = ۰ تو یہہ مساوات ہوگی کہ لا = ۰

(۱۴۴) قریب البضوی کے کسی نقطہ عمود المماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹۷ کی حدود کو دیکھو)

فرض کرو کہ لا' و ی' نقطہ کے محددین ہین تو مساوات مماس کی اوس نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

$$ی = \frac{۲ط}{ی'} (لا + لا') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۱)$$

اور مساوات ایک خط کی جو (لا' و ی') مین گذرتا ہی اور عمود (۱) پر ہے یہہ ہا کہ

$$ی - ی' = - \frac{ی'}{۲ط} (لا - لا') \quad . \quad . \quad . \quad (۲)$$

یہہ مساوات عمود المماس (لا' و ی') کی ہے

(۱۴۵) مساوات عمود المماس کی اوس زاویہ کے مماس کی رقموں مین بیان ہوسکتی ہی جو خط محور خط منحنی کے ساتھہ بناتا ہی اسواسطے مساوات عمود المماس کی یہہ ہے کہ

$$ی = - \frac{ی'}{۲ط} لا + ی' \frac{ی' لا'}{۲ط}$$

$$یا\ ی = - \frac{ی'}{۲ط} لا + ی' + \frac{ی'^۳}{۸ط^۲} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۱)$$

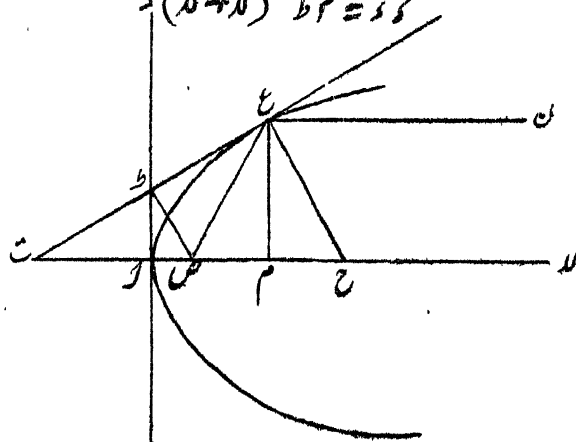
فرض کرو کہ $- \frac{ی'}{۲ط} = م$ ∴ $ی' = - ۲ ط م$

پس (۱) اسطرح لکہی جاتی ہے کہ

$$ی = م لا - ۲ ط م - ط م^۳ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۲)$$

(۱۴۶) اب ہم بعض خواص قریب البضوی کے استنباط دفعات مذکور سے کرتے ہین فرض کرو کہ لا' و ی' محددین نقطہ ع کے ہوں اور ع ت مماس نقطہ کا اور ع ح عمود المماس

نقطہ ع کا ہے مساوات مماس نقطہ ع کی یہہ ہے کہ

ی یَ = ۲ط (لا + لاَ)

فرض کرو کہ ر = ۰ تو لا = - لاَ اسے معلوم ہوا کہ ات = ام

اور نیز ص ت = ات + اص

= ام + اص

= ص ع بموجب دفعہ (۱۲۹) کے

اسنے معلوم ہوا کہ ص ت ع مثلث متساوی الساقین ہے اور زاویہ ص ت ع = زاویہ ص ع ت

پس اگر ع ن متوازی محور خط منحنی کا ہو تو ع ن اور ع ص کا میلان نقطہ ع پر مماس کے برابر ہوگا

(۱۳۷) مساوات نقطہ ع کے عمود المماس کی یہہ ہے کہ

ی - یَ = - یَ/۲ط (لا - لاَ)

محور اور عمود المماس کے نقطہ تقاطع ح پر

ی = ۰ پس اوپر کی مساوات سے

لا - لاَ = ۲ط

پس م ح = ۲ط = نصف عرض مستقیم کے

اور نیز ص ح = ص ع

(۱۳۸) کسی نقطہ پر ایک خط مماس ہو اور اوسپر نقطہ ماسکہ سے عمود نکالا جاوے تو اس عمود اور مماس کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

فرض کرو کہ لاَ و یَ محددات کسی نقطہ ع کے خط منحنی پر ہیں تو مساوات مماس کی نقطہ ع پر یہہ ہوگی

ی = ۲ط / یَ (لا + لاَ) . . . . (۱)

مساوات خط کی جو ماسکہ سے عمود (۱) پر نکالا جاے یہہ ہوگی کہ

ی = − یَ / ۲ط (لا − ط) (۲)

اب ہم لاَ و یَ کو مساوات (۱) اور (۲) کی وساطت سے ساقط کرتے ہین

یَ۲ = ۴ط لاَ (۳)

مساوات (۳) سی ہم لاَ کو یَ کی رقموں مین دریافت کرین تو مساوات (۱) کی یہہ شکل ہو جاۓگی

ی = ۲ط / یَ لا + یَ / ۲ (۴)

پس سوال کی صورت متبدل ہوکر یہہ ہوگی کہ (۴) اور (۲) سی یَ و لاَ کو ساقط کرو

اور (۲) سے یَ = − ۲ط ی / (لا − ط) (۵)

اسکو (۴) مین مندرج کرو

ی = − (لا − ط) لا / ی − ط ی / (لا − ط)

∴ ی۲ (لا − ط) + (لا − ط)۲ لا + ط ی۲ = ۰

یا [ی۲ + (لا − ط)۲] لا = ۰ (۶)

اگر جز ضربی ی۲ + (لا − ط)۲ برابر صفر کے ہو تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

ی = ۰ اور لا = ط (۷)

جو نقطہ اسطرح متعین ہوتا ہے اوسی ماسکہ کہتے ہین لیکن وہ مقام انتقاط تقاطع (۱) اور (۲) کا نہین ہے اسواسطے کہ جو قیمتین مساوات (۷) کی شرائط کو پورا کرتی ہین اگرچہ وہ مساوات (۲) کی شرائط کو پورا کرتی ہین لیکن مساوات (۱) شرائط کو نہین پورا کرتین اسیواسطے ہم یہہ نتیجہ نکالتی ہین کہ مقام انتقاط مطلوب مساوات

لا = ۰ (۸) سے حاصل ہوتا ہے

اور یہہ مساوات (۶) کے دوسری جز ضربی پر خیال کرنے سے حاصل ہوتا ہے

اور اس نتیجہ کا ثبوت آسانی سے ہو سکتا ہی اسواسطے کہ اگر ہم لا = ۰ کی مساوات (۱) مین رکھین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ ی = ۲ط لاَ / یَ = یَ / ۲ اور اگر ہم لا = ۰ کی مساوات (۲) مین رکھین تو یہی ہمکو حاصل ہوگا کہ ی = یَ / ۲ اسسے یہہ ثابت ہوا کہ مساوات (۱) اور (۲)

خط لد = ۰ پر قطع ہوتے ہین۔
پس اگر دفعہ ۱۳۶ کی شکل مین ط نقطہ تقاطع مماس نقطہ ع اور محور ر کا ہو تو ص ط عمود مماس پر ہوگا
(۱۳۹) جو عمل دفعہ مذکور مین ذکر ہوا ہے وہ نہایت بکار آمد ہے اور ہمارے مطلب کا ہے۔ (۱) اور
(۲) مساواتین دو خطوط مستقیم کی ہین اگر ان ہم ساری مساواتون سے قیمتین لد اور ر
کی دریافت کرین تو اوسے خطوط کے نقطہ تقاطع کا مقام متعین ہوگا۔ قیمتین لد اور ر کی
موقوف لد اور ر کی قیمتون پر ہین اسطرح سے ہمکو مختلف نقاط تقاطع مختلف خطوط کے مساوات
(۱) اور (۲) سے حاصل ہونگی۔ اگر مساوات (۱) (۲) اور (۳) سے ہم لد اور ر کو ساقط
کرین تو ایک مساوات ہمکو ایسی حاصل ہوگی کہ وہ (۱) اور (۲) کے ہر نقطہ تقاطع کے واسطے
موضوع ہوگی اور یہہ مساوات موافق تعریف مقام النقاط کی (۱) اور (۲) کی نقاط تقاطع کے
مقام النقاط کی مساوات ہوگی
بعض اوقات لد اور ر کی ساقط کرنے سے ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہی کہ وہ ہماری مطلوب
مقام النقاط کو نہین تعبیر کرتی جیسے دفعہ گذشتہ مین ہمکو حاصل ہوئی تہی۔ طالب علمون نے جبر و مقابلہ
کے سوالات کے حل کرنے مین اس بات کو معلوم کیا ہوگا کہ بہت سی نتایج اونکو سوالات کے
حل کرنے مین ایسی حاصل ہو جاتی ہین کہ جنکی اونہین تلاش نہ تہی۔ یہہ نتایج زائد جو حاصل
ہوتے ہین اونکی معنی ہم مثل دفعہ گذشتہ کی بیان کیا کرتی ہین۔ خواہ لد اور ر کچھہ ہی ہون
قیمتین لد = ط اور ر = ۰ اون مساواتون مین سے جنمین عمل اسقاط کیا ہی ایک مساوات
کی شرائط کو پورا کرینگی۔ اس باب کو ہم پہلے سی جانتے ہین کہ ہماری نتیجہ مین دوسرا جزو ضربی ایسا
ضرور ہوگا کہ اوسے ہمارا مطلب حاصل ہوگا
(۱۴۰) اگر خط ماسکہ سے کہینچا گیا عمود مماس پر نہو بلکہ ایک مستقل اور معین زاویہ مماس کے ساتھہ
بناتی تو بہی اونکی نقاط تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا۔ ہم سب اقسام قطع کی
تحقیقات کے بیان کرتے ہین

فرض کرو کہ ب اوس زاویہ کو تعبیر کرتا ہی جو درمیان مماس اور اوس خط کی جو ماسکہ سے کھینچا جای واقع ہی ۔ مساوات (۱) تو وہ ہوگی جو دفعہ ۱۳۸ مین تھی اور مساوات (۲) کی جگہہ بموجب دفعہ ۴۵ کی یہہ حاصل ہوگی

$$\text{ی} = \frac{\frac{\text{۲ط}}{\text{ی}} + \text{مس ب}}{\text{۱} - \frac{\text{۲ط}}{\text{ی}}\text{مس ب}} (\text{لد} - \text{ط})$$

$$= \frac{\text{۲ط} + \text{ی مس ب}}{\text{ی} - \text{۲ط مس ب}} (\text{لد} - \text{ط})$$

اور دفعہ ۱۳۸ کے (۵) کی جگہہ یہہ ہم کو حاصل ہوگا

$$\text{یَ} = \frac{\text{۲ط} (\text{لد} - \text{ط}) + \text{۲ط ی مس ب}}{\text{ی} - (\text{لد} - \text{ط}) \text{مس ب}}$$

نتیجہ اسقاط کا یہہ ہے کہ

$$\text{ی} [\text{ی} - (\text{لد} - \text{ط}) \text{مس ب}] [\text{لد} - \text{ط} + \text{ی مس ب}]$$
$$- \text{لد} [\text{ی} - (\text{لد} - \text{ط}) \text{مس ب}]^2 - \text{ط} (\text{لد} - \text{ط} + \text{ی مس ب})^2 = ۰$$

اب دفعہ ۱۳۸ کی ہدایت کی موافق ہم پہلے سے جانتے ہین کہ $\text{ی}^2 + (\text{لد} - \text{ط})^2$ ایک جز ضربی مساوات کی بائین طرف کا ہی اور پہر ہم اختصار کرنے سے یہہ مساوات حاصل کرینگے کہ

$$[\text{ی}^2 + (\text{لد} - \text{ط})^2] [\text{ی مس ب} - \text{لد مس ب} - \text{ط}] = ۰$$

پس مقام انقاط مطلوب یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی} = \text{لد مس ب} + \text{ط مم ب}$$

(۱۴۱) ماسکہ سے جو عمود قرب البیضوی کے کسی نقطہ کے مماس پر نکالا جاے اوسکا طول دریافت کرو

مساوات مماس کی نقطہ لدَ و یَ پر یہہ ہے

$$\text{ی یَ} = \text{۲ط} (\text{لد} + \text{لدَ})$$

اور نقطہ (ط و ۰) سے جو عمود نکالا گیا ہی اوسکی مساوات بموجب دفعہ ۴۷ کی

$$\text{ع} = \frac{\text{۲ط} (\text{ط} + \text{لدَ})}{\sqrt{\text{یَ}^2 + \text{۴ط}^2}} = \frac{\text{۲ط} (\text{ط} + \text{لدَ})}{\sqrt{\text{۴ط} (\text{ط} + \text{لدَ})}} = \sqrt{\text{ط} (\text{ط} + \text{لدَ})}$$

نقطہ تماس کے بعد ماسکہ کو ف سے اور عمود کو ع سے تعبیر کرو تو

$$\text{ف} = \text{ط} + \text{لدَ}$$
$$\text{ع} = \sqrt{\text{ط ف}}$$

(۱۴۲) ہر نقطہ بیرونی سے قریب البصوی کے دو مماس کہنچ سکتی ہین

فرض کرو کہ مساوات قریب البصوی کے یہہ ہی کہ

ی² = ۴ ط لا . . . . . (۱)

اور ح اور ق محددین نقطہ بیرونی کے ہون اور فرض کرو کہ لاَ و یَ محددین قریب البصوی کے ایک نقطہ کی ہون جسپر مماس قریب البصوی کو مس کرتا ہو اور یہہ مماس نقطہ (ح و ق) پر گذرتا ہی تو مساوات مماس (لاَ و یَ) کی یہہ ہو گی کہ

ی یَ = ۲ ط (لا + لاَ) . . . . (۲)

چونکہ یہہ مماس نقطہ (ح اور ق) پر گذرتا ہی تو

ق یَ = ۲ ط (ح + لاَ) (۳)

اور نیز (لاَ و یَ) قریب البصوی کے ہی محددین ہین

یَ² = ۴ ط لاَ (۴)

مساواتین (۳) اور (۴) سی قیمتین لاَ اور یَ کی متعین ہوتی ہین

(۴) سے (۳) مین قیمتین رکہو تو

ق یَ = ۲ ط ح + یَ²/۲

یا یَ² − ۲ ق یَ + ۴ ط ح = ۰

اس مساوات درجہ دوم کی دونو قیمتین ممکن ہین اسلئے کہ (ح و ق) نقطہ بیرونی ہی اور اسواسطے ق² بڑا بر نسبت ۴ ط ح کی ہی – ہر قیمت یَ کی بموجب (۴) کی قیمت لاَ کی ساتھ مطابق ہوتی
اسے ثابت ہوا کہ دو مماس نقطہ بیرونی سے کہنچ سکتے ہین

جن نقطون پر یہہ مماس قریب البصوی کو مس کرتی ہین اونمین جو خط ملایا جاوے اوسے وتر تماس کہتے ہین

(۱۴۳) قریب البصوی کے مماس ایک نقطہ بیرونی سے نکالی گئی ہین وتر تماس کی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ ح اور ق محددین نقطہ بیرونی کے ہین اور نقطہ (ح اور ق) سی جو ایک مماس نکالا جاوے اوسکے نقطہ تماس کے محددین لاَ و یَ ہین اور نقطہ (ح و ق) سے جو دوسرا مماس نکالا جاوے

اور اسکی نقطہ تماس کے محددین لا۲ و ی۲ ہین تو مساوات مماس کی جو (لا۱ و ی۱) مین گذرتا ہی

ی ی۱ = ۲ط (لا + لا۱) ——— (۱)

چونکہ یہہ مماس (ح و ق) مین گذرتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

ق ی۱ = ۲ط (ح + لا۱) (۲)

اور علی ہذا القیاس اس سبب سے کہ مماس (لا۲ و ی۲) نقطہ (ح و ق) مین گذرتا ہی مساوات

ق ی۲ = ۲ط (ح + لا۲) (۳)

اسسے یہہ معلوم ہوتا ہی کہ مساوات وتر تماس کی

ق ی = ۲ط (لا + ح) (۴)

اسواسطے کہ مساوات (۴) ظاہر کسی خط مستقیم کی مساوات معلوم ہوتی ہی اور نیز یہہ خط (لا۱ و ی۱) مین گذرتا ہی اسواسطے کہ مساوات (۴) کی ان قیمتون سے کہ لا = لا۱ اور ی = ی۱ شرائط پوری ہوتی ہین ان شرائط کا پورا ہونا مساوات (۲) سے ظاہر نظر آتا ہی اور علی ہذا القیاس (۳) سے یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ خط لا۲ و ی۲ مین بہی گذرتا ہی پس اسسے معلوم ہوا کہ (۴) مساوات مطلوب ہی

اور اسیطرح سے ہم مماس قریب البیضوی کے ایک نقطہ بیرونی سے کہینچ سکتے ہین کہ خط جو مساوات (۴) سے تعبیر ہوتا ہی اوسی کہینچین اور جن نقطون پر یہہ خط قریب البیضوی سے ملتی اون مین اور نقطہ بیرونی مین خطوط وصل کرین تو اسیطرح سے خطوط ملائے گئے مماس مطلوبہ ہونگے

(۱۴۴) ایک نقطہ قائم سے وتر ایک قریب البیضوی کے کہینچے گئے ہین اور ہر وتر کے انجامون سے مماس نکالے گئے ہین تو ثابت کرو کہ مقام انتقاط مماسون کے نقاط تقاطع کا ایک خط مستقیم ہوگا

فرض کرو کہ ح اور ق محددین نقطہ کے ہین جسسے کہ وتر کہینچے گئے ہین اور ان وترون مین سے ایک وتر کے اطراف سے مماس کہینچے گئے ہین اور (لا۱ و ی۱) وہ نقطہ ہی جسپر وہ ملتے ہین تو مساوات وتر مماس کے اسکی مطابق بموجب دفعہ ۱۴۳ کے یہہ ہوگی کہ

ی ی۱ = ۲ط (لا + لا۱)

لیکن یہہ وتر (ح و ق) مین گذرتا ہی اسواسطے

ق ی۱ = ۲ط (ح + لا۱)

اسے معلوم ہوتا ہی کہ (لا، ی) اس خط

ق ی = ۲ ی (لا + ح)

پر واقع ہوتا ہی یعنی مقام التقاط مماسون کی تقاطع کا ایک خط مستقیم ہے

اب ہم اس دعوی کو بالعکس ثابت کرتے ہین

(۱۴۵) اگر ایک خط مستقیم کی کسی نقطہ سی قریب البضوی کے مماس نکالی جائین تو تمام وتر مماس ایک نقطہ معین پر گذرینگی

فرض کرو کہ ا لا + ب ی + س = ۰ (۱)

مساوات خط مستقیم کی ہو اور اس خط مین (لاَ، یَ) ایک نقطہ ہو جسے مماس قریب البضوی کھینچے جائین تو مساوات وتر تماس کی یہہ ہوگی کہ

ی یَ = ۲ ط (لا + لاَ) (۲)

چونکہ لاَ، یَ مساوات (۱) پر واقع ہین

ا لاَ + ب یَ + س = ۰

اسلئے مساوات (۲) اس طرح لکھی جا سکتی ہے کہ

ی (ا لاَ + س) + ۲ ط ب (لا + لاَ) = ۰

یا (ا ی + ۲ ط ب) لاَ + س ی + ۲ ط ب لا = ۰ (۳)

اب خواہ کچھہ ہی قیمت لاَ کی ہو یہہ خط اوس نقطہ پر گذرتا ہی جسکا محددین ان ہم ساری مساواتون سی دریافت ہوتی ہین کہ ا ی + ۲ ط ب = ۰ اور س ی + ۲ ط ب لا = ۰

یعنی وہ نقطہ جسکی محددین یہہ ہین کہ ی = − $\frac{۲ ط ب}{ا}$ اور لا = $\frac{س}{ا}$

(۱۴۶) طالب علم کو چاہیے کہ وہ اس مساوات

ق ی = ۲ ط (لا + ح)

کے معانی مختلفہ پر توجہ کرے دفعہ ۱۰۳ مین جو دائرہ کے باب مین بیان ہوا ہے، وہ قریب البضوی سے موافقت کرو

## اقطار

(۱۴۷) کسی نقطہ سے سمت معلوم مین جو ایک خط قریب البضوی سے ملتا ہو اکھینچا جاے اوسکا طول دریافت کرو

فرض کرو کہ جس نقطہ سے خط کہیچا جاے اوسکی محددین لاَ اور یَ ہین اور جس نقطہ تک کہیچا جاے اوسکی محددین لا اور ی ہین اور زاویہ میلان خط کا محور لا کے ساتھہ ر ہے اور نق طول خط کا ہے تو موجب دفعہ ۱۲۷ کے

لا = لاَ + نق جم ر ، ی = یَ + نق جب ر (۱)

اگر (لا، ی) قریب البیضوی پر ہو تو یہہ قیمتین مساوات ی² = ۴ط لا مین رکہنے سے یہہ حاصل ہوگا

(یَ + نق جم ر)² = ۴ط (لاَ + نق جم ر)

∴ نق² جب² ر + ۲ نق (یَ جب ر − ۲ط جم ر) + یَ² − ۴ط لاَ = ۰ (۲)

اس مساوات درجہ دوم سے دو قیمتین نق کی دریافت ہونگین اور یہہ طول خطوط کا ہوگا جو (لاَ، یَ) سے سمت معلوم مین قریب البیضوی تک کہیچے جائین

جب نقطہ (لاَ، یَ) قریب البیضوی کے اندر واقع ہو تو اوپر کے مساوات درجہ دوم کی قیمتین مختلف العلامت ہونگین اس صورت مین دو خطوط جو (لاَ، یَ) سے قریب البیضوی سے ملتے ہوے کہیچے جائینگے مخالف سمتون مین ہونگے اور جب نقطہ (لاَ، یَ) قریب البیضوی سے باہر ہو تو قیمتون کی ایک ہی علامت ہونگی اور اسلیے خطوط کی ایک ہی سمت ہوگی

(۱۴۸) حد اوتار متوازیہ کی نقاط وسط کے مقام النقاط کا نام قطر منحنی ہے

(۱۴۹) ایک مجموعہ اوتار متوازیہ کا قریب البیضوی مین معلوم ہے اونکی قطر کو دریافت کرو

فرض کرو کہ ر زاویہ میلان اوتار کا محور قریب البیضوی کے ساتھہ ہو اور لاَ، یَ محددین نقطہ وسط کسی وتر کے وترون مین سے ہون تو مساوات جسمین طول خطون کا کہ (لاَ، یَ) سے خط منحنی تک کہیچے جائین تحقیق ہوتا ہے بموجب دفعہ ۱۴۷ کے یہہ ہوگا

نق² جب² ر + ۲ نق (یَ جب ر − ۲ط جم ر) + یَ² − ۴ط لاَ = ۰ (۱)

چونکہ (لاَ، یَ) نقطہ وسط وتر کا ہے تو قیمتین نق کی جو مساوات درجہ دوم سے دریافت ہونگین مقدار مین مساوی اور علامتون مین مختلف ہونگین اسسے معلوم ہوا کہ امثال نق کے فنا ہونی چاہیئے پس

ۍ جب ر − ۲ ط جم ر = ۰

∴ ۍ = ۲ ط مم ر (۲)

پس قطر مطلوبہ ایک خط مستقیم متوازی محور قریب البضوی کا ہے

اسے معلوم ہوا کہ ہر قطر متوازی محور قریب البضوی کا ہی

اور نیز ہر خط مستقیم متوازی محور قریب البضوی کا قطر ہوتا ہی یعنی مجموعہ اوتار متوازیہ کی تنصیف کرتا ہے،

اسواسطے کہ ر کے مناسب قیمت کی مقرر کرنے سے مساوات (۲) ہر خط مستقیم کو تعبیر کرسکتی ہی جو

محور کا متوازی ہو

(۱۵۰) جس نقطہ پر خط ۍ = ۲ ط مم ر قریب البضوی سی ملتا ہی اوسے مماس قریب البضوی کا کہیا جاے

تو مساوات مماس کی یہہ ہوگی کہ

ۍ = ۲ط/ۍ (لد + لَد)

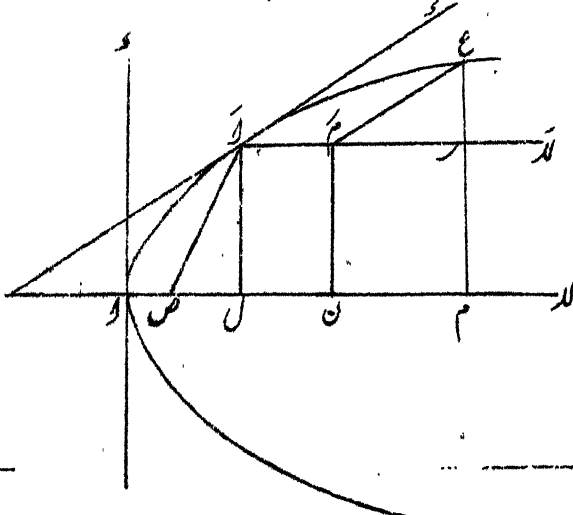
یعنی

ۍ = مس ر (لد + لَد)

اسے معلوم ہوا کہ قریب البضوی کے کسی قطر کے طرف سی مماس نکالا جاے تو وہ متوازی اون

وتروں کا ہوتا ہی جنکو قطر تنصیف کرتا ہی

(۱۵۱) جب قطر اور مماس کہیا گیا اوس نقطہ سی جہاں قطر قریب البضوی سی ملتا ہی

محور خیال کئے جائیں تو اس صورت میں مساوات قریب البضوی کی دریافت کرو

ۍ ۍ ع لد ا م ر لد ا ص ل ن م

فرض کرو کہ ح اور ق محددین قریب البضوی کے نقطہ ا کے ہین اس نقطہ کو مبدء جدید مقرر کرو اور اوس سے ایک خط ا لا متوازی محور خط منحنی کا نکال کر محور لا کا اور ا ی مماس خط منحنی کا نیا محور ی کا قرار دو اور زاویہ ی ا لا = ر تو موجب دفعہ (۱۵۰) کے

$$\frac{۲ط}{ق} = \text{مس}\ ر$$

فرض کرو کہ خط منحنی کے نقطہ ع کے محددین لا اور ی باعتبار جدید محورون کے اور لاَ اور یَ باعتبار اصلی محورون کے لاَ اور یَ ہین سے ع م متوازی ا ی کا اور ع مَ متوازی ا ی کا کھینچو اور ا ل اور م ن متوازی ا ی کا کھینچو اور ر نقطہ تقاطع ع م اور ا لا کا مقرر کرو تو

لاَ = ا م = ا ل + ل ن + م ن = ا ل + ا مَ + مَ ر
= ح + لا + ی جم ر
یَ = ع م = ر م + ع ر = ا ل + ع ر
= ق + ی جب ر

ان قیمتون کو مساوات $یَ^۲ = ۴ ط لاَ$ مین رکھو تو

$$(ق + ی\ جب\ ر)^۲ = ۴ط(ح + لا + ی\ جم\ ر)$$

یا $ی^۲ جب^۲ ر + ۲ی (ق\ جب\ ر - ۲ط\ جم\ ر) + ق^۲ - ۴ط ح = ۴ ط لا$

لیکن ح = ۲ط مم ر اور $ق^۲ = ۴ط ح$ پس

$$ی^۲ جب^۲ ر = ۴ ط لا$$

یا $ی^۲ = \frac{۴ط}{جب^۲ ر} لا$

یہہ مساوات مطلوب ہے

ہم ثابت کر سکتے ہین کہ $\frac{ط}{جب^۲ ر} = ص اَ$

اسواسطے کہ ص اَ = ط + ح بموجب (دفعہ ۱۲۹) کے اور

$$ح = \frac{ق^۲}{۴ط} = ط\ مم^۲ ر$$

$$\therefore ط + ح = \frac{ط}{جب^۲ ر}$$

پس اسسے معلوم ہوا کہ مساوات اسطرح لکھی جاسکتی ہی کہ

$$ی^۲ = ۴ طَ لاَ$$

اسمین طَ = ص اَ اور مقادیر متغیر کے زیرون کو ہم اسقط کرین تو

$$ی^۲ = ۴ طَ لا$$

(۱۵۲) قریب البضوی کے مماس کی مساوات اوسی صورت کی ہوگی جس صورت کی ہم پہلی لکھہ آئے ہین

خواہ محور قائم الزاویہ ہون یا قطر اور اوسکی طرف سی مماس نکالا گیا محور محرف ہون اسواسطے کہ بموجب تحقیقات دفعہ ۱۴۱ کے مساوات قریب البیضوی کی بلحاظ ان محرف محورون کے ی۲ = ۴ ط لا ہے

(۱۵۳) کسی تر قریب البیضوی کے اطراف سے جو مماس نکالے جائین وہ اوس قطر پر ملتے ہین جو اوس وتر کی تنصیف کرتا ہے

اوس قریب البیضوی کی طرف رجوع کرو جسکے محورون مین ایک محور قطر ہے

جو اوس وتر کی تنصیف کرتا ہی اور دوسرا مماس ہی جو اس قطر کی طرف سے نکالا گیا ہی

فرض کرو کہ مساوات قریب البیضوی کی یہہ ہے کہ

ی۲ = ۴ ط لا

فرض کرو کہ لا و ی محددین طرف و تر کی ہین تو مساوات مماس کی اس نقطہ پر یہہ ہوگی

ی ی = ۲ ط (لا + لا)  —— (۱)

اور محددین وتر کی دوسری طرف کے یہہ ہین کہ لا و – ی اور مساوات مماس کی یہہ ہے کہ

– ی ی = ۲ ط (لا + لا)  —— (۲)

یہہ خطوط جو مساوات (۱) اور (۲) سے تعبیر ہوتی ہین اوس نقطہ پر ملتے ہین جسکے اندر

ی = ۰ لا = – لا

اسلئے دعوی ہمارا ثابت ہے

## قطبی مساوات

(۱۵۴) مساوات قطبیہ قریب البیضوی کی دریافت کرو جسکا ماسکہ قطب ہی

فرض کرو کہ ص ع = نق اور ا ص ع = ر (دفعہ ۱۲۵ کی شکل دیکھو)

تو ص ع = ع ن بموجب حدود کے

یعنی ص ع = ط ص + ص م

یا نق = ۲ ط + نق جم (ک – ر)

∴ نق (۱ + جم ر) = ۲ ط

اور نق = $\frac{۲ ط}{۱ + جم ر}$

اگر زاویہ لا ص ع کو ر سے تعبیر کرین تو موافق سابق کے ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ص ع = ط ص + ص م

پس نق = ۲ط + ن جم ر

اور نق = ۲ط / (۱ − جم ر)

(۱۵۵) جب راس قطب ہو تو مساوات قطبیہ قریب البضوی کی مساوات ی^۲ = ۴ط لا مین بجای لا و ی کے نق جم ر اور نق جب ر لکھنے سے یہہ حاصل ہو جاتی ہے کہ

ن = ۴ط جم ر / جب^۲ ر

اب ہم متفرقات دعوی قریب البضوی کے باب مین لکھتے ہین

**حد** تراشش مخروطی کے ماسکہ پر جو وتر گذرے اوسی وتر ماسکہ کہتے ہین

(۱۵۶) قریب البضوی کے کسی وتر ماسکہ کی طرفون سی مماس کہیچے جائین تو (۱) مماس خط منتظم پر تقاطع کرینگے (۲) مماس زاویہ قائمہ پر ملینگے (۳) اور خط جو اس نقطہ تقاطع اور ماسکہ مین ملایا جائیگا وہ عمود وتر ماسکہ پر ہوگا

(۱) اگر مماس قریب البضوی کے نقطہ (ح و ق) پر ملتے ہین تو مساوات وتر تماس کی بموجب فقرہ ۱۴۳ کی یہہ ہوگی ق ی = ۲ط (لا + ح)

فرض کرو کہ وتر نقطہ ماسکہ پر گذرتا ہی تو قیمتین لا = ط اور ی = ۰ اس مساوات کی شرائط کو پورا کرینگی

∴ ۰ = ۲ط (ط + ح)

∴ ح = − ط

یعنی مماسون کا نقطہ تقاطع خط منتظم پر واقع ہی

(۲) قریب البضوی کے مماس کی مساوات بموجب دفعہ (۳) کی اسطرح لکھی جاسکتی ہی کہ

ی = م لا + ط/م

فرض کرو کہ (ح و ق) مماس پر ایک نقطہ ہے

∴ (ح م^۲ − ق م) + ط = ۰

اس مساوات درجہ دوم سے وہ میلان معلوم ہونگے جو محور قریب البضوی کے ساتہہ وہ دو خط رکھتے ہین جو نقطہ (ح و ق) سے مماس قریب البضوی کے کہیچے جائین — فرض کرو کہ میلان کے زاویون کے مماس م۱ و م۲ ہین تو موجب خواص مساوات کے

م۱ م۲ = ط/ح

اگر ح = − ط تو م۱ م۲ = −۱

یعنی مماس ایک دوسرے پر عمود ہین

(۳) ماسکہ اور نقطہ (ح و ق) مین جو خط گزرتا ہی اوسکی مساوات یہہ ہی کہ

ی = ق / (ح − ط) (لا − ط)

اگر ح = − ط تو یہہ مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

ی = ق / ۲ط (لا − ط)

اور اسلیواسطے یہہ خط عمود و تر ماسکہ پر ہے جسکی مساوات یہہ ہے کہ

ی ق = ۲ ط (لا − ط)

(۱۵۷) اگر کسی نقطہ سی خواہ وہ اندر قریب البیضوی کے ہو خواہ باہر دو خطوط مستقیم خط منحنی سے ملتے ہوئی متوازی دو خطوط مستقیم معلوم پر کہچی جائین تو اونکی حصون کی سطحون مین نسبت مستقل ہوگی یعنی جسمین کبہی کچہہ تغیر نہین واقع ہوگا

فرضکرو کہ (لا و ی) نقطہ معلوم ہو اور ھ اور ب زاویے میلان خطوط مستقیم کے محور قریب البیضوی کے ساتہہ ہون بموجب دفعہ ۱۴۷ کے اگر ایک خط (لا و ی) سی کہچا جاے اور خط منحنی سے ملے اور محور پر زاویہ ھ کا میلان رکہے تو طول حصون کا اس مساوات سی معلوم ہوسکتا ہی کہ

نق جب² ھ + ۲ نق (ی جب ھ − ۲ ط جم ھ) + ی² − ۴ ط لا = ۰

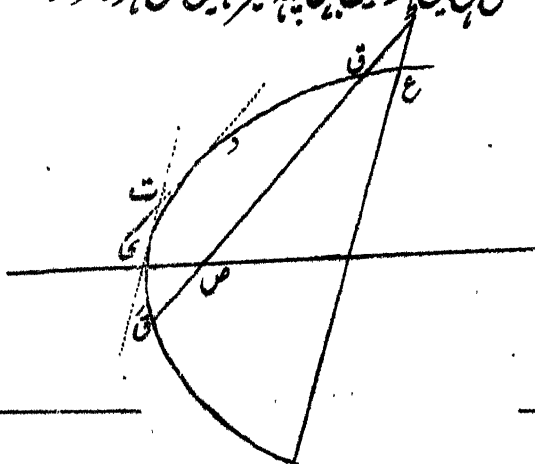
اسلیواسطے بموجب خواص مساوات درجہ دوم کے سطح حصص کا

= (ی² − ۴ ط لا) / جب² ھ

اور علی ہذا القیاس سطح خط کی حصص کا نقطہ (لا و ی) سے زاویہ ب پر

= (ی² − ۴ ط لا) / جب² ب

اسے ثابت ہوا کہ نسبت سطحون کی = جب² ب / جب² ھ

اور یہہ نسبت مستقل ہی یعنی اوسمین کبہی کچہہ تغیر نہین واقع ہوگا خواہ لا اور ی کچہہ ہی ہو

ق ع د ت ہ ص ق

فرض کرو کہ ط وہ نقطہ ہی جسے خطوط ط ع عَ اور ط ق قَ کہیچے گئے ہین اور محور قریب البصوی کے ساتہہ زوایا ھ اور ا پر میل رکہتی ہین تو ہمکو یہہ ثابت کرنا ہی کہ

$$\frac{\text{ط غ}}{\text{ط ق}} \cdot \frac{\text{ط غَ}}{\text{ط قَ}} = \frac{\text{جب}^2\,\text{ا}}{\text{جب}^2\,\text{ھ}}$$

فرض کرو کہ مماس قریب البصوی کے متوازی ع عَ اور ق قَ کے کہیچے گئے ہین اور وہ قریب البصوی سے ی اور د پر ملتے ہین اور ص ماسکہ ہے تو بموجب دفعہ ۱۰۱ کے

$$\frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}} = \frac{\text{جب}^2\,\text{ا}}{\text{جب}^2\,\text{ھ}} \quad \therefore \quad \frac{\text{ط ع} \cdot \text{ط عَ}}{\text{ط ق} \cdot \text{ط قَ}} = \frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}}$$

فرض کرو کہ ط نقطہ ت پر منطبق ہوتا ہی تو ط ع ۰ ط عَ برابر ت ی² اور ط ق ۰ ط قَ برابر ت د² کے ہوتا ہی

$$\therefore \quad \frac{\text{ت ی}^2}{\text{ت د}^2} = \frac{\text{ص ی}}{\text{ص د}}$$

## مثالین

(۱) ا اور ل مین جو خط ملایا جاہی اوسکی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۱۲۶ کی شکل دیکہو)

(۲) مساوات دائرہ کی جو ا و ل و لَ پر گذرتا ہی دریافت کرو (شکل دفعہ ۱۲۶)

(۳) ایک نقطہ اسطرح متحرک ہوتا ہی کہ اوسکا ادنی بعد دائرہ معلوم سے برابر ہے اوس بعد کے جو وہ دائرہ معلوم کے ایک قطر معین سے رکہتا ہی تو مقام النقاط نقطہ کا دریافت کرو

(۴) ی² = ۸ ط لا اور لا² + ۸ ط ی = ۰ کے خطوط ہی مرتسم کرو اور اونکے نقاط تقاطع دریافت کرو

(۵) نقطہ ل پر مماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۱۲۶ کی شکل)

(۶) اشلہ (۱) اور (۵) مین زاویہ میلان دریافت کرو

(۷) نقطہ ل کی عمود المماس کی مساوات دریافت کرو

(۸) وہ نقطہ دریافت کرو جہان عمود المماس ل دوبارہ خط منحنی سے ملتا ہی اور ان نقطون کے درمیان جو وتر واقع ہوا اوسکا طول دریافت کرو

(۹) قریب البصوی مین ایک نقطہ ایسا دریافت کرو جہان سے مماس نکالا گیا محور کے ساتہہ ۴۵° کا زاویہ بناہے

(۱۰) مماس جو (لا، ی) پر ہو اوسپر عمود جو خط منتظم کی طرف بایئن سے نکالا جاے اوسکا طول ثابت کرو کہ برابر ہے $\frac{ط(لا-ط)}{(لا+ط)}$ کے

(۱۱) نقاط تماس اون مماسون کے دریافت کرو جنپر عمود خط منتظم کی طرف بایئن سے نکالی گئی برابر ایک چوتہائی عرض مستقیم کے ہون

(۱۲) قریب البیضوی کا راس ا مرکز ایک دائرہ کا ہی اور اوسکا ماسکہ ص ہی اور قطر دائرہ کا ۳ ا ص ہے تو ثابت کرو کہ وتر مشترک ا ص کی تنصیف کرتا ہی

(۱۳) خط منحنی ی = لا − لا^۲ کو مرتسم کرو اور دریافت کرو کہ آیا خط مستقیم لا + ی = ۰ مماس اوسکا ہے

(۱۴) قریب البیضوی کے کسی نقطہ سی مماس نکالا جای وہ خط منتظم سی اور عرض مستقیم محدود سے دو نقطون پر ملیگا جنکا بعد ماسکہ سے برابر ہوگا

(۱۵) قریب البیضوی کے نقطہ ع کا معین ع م ہی اور ایک خط متوازی محور کا ع م کو تنصیف کرتا ہوا کہینچا گیا ہی اور خط منحنی کو نقطہ ق پر قطع کرتا ہی اور مماس م ق کو جو راس ا سے نکالا جاے نقطہ ت پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ ا ت = $\frac{۲}{۳}$ م ع

(۱۶) اگر ایک دائرہ کے کسی نقطہ ع سے ع س اوسکے مرکز س مین ملایا جاے اور وتر ع ق متوازی قطر ا س ب کا کہینچا جای اور نقطہ ر تنصیف ہو تو ثابت کرو کہ س ع اور ا ر کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط قریب البیضوی ہوگا

(۱۷) جن نقطون پر خط ی = م لا + س قریب البیضوی سے ملتا ہی اونکی معین دریافت کرو اور پہر اوس سے جو حصہ اس خط کا قریب البیضوی کے درمیان ہے قرینا ہی اوسکی نقطہ وسط کی معین دریافت کرو

(۱۸) ا مسدد ہی اور ب ایک نقطہ محور ا پر ہی اور ب ق محور لا کا متوازی ہی اور ا ق اور ضرورت کی صورت مین ا ق ممدودہ مین نقطہ ع ایسا مقرر کیا ہی کہ اوسکا معین برابر ب ق کے ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط نقطہ ع کا قریب البیضوی ہے

(۱۹) خط ب ق عمود قریب البیضوی کے محور س ا ب پر ہی جسکا راس ا ہی ب ق کے

کسی نقطہ ق سے ع ق متوازی محور کا خط منحنی سے نقطہ ع پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر س ا برابر ا ب کے بنایا جای تو خطوط ا ق اور س ع قریب البیضوی پر قطع ہونگی

(۲۰) نقطہ (لا، ی) سے عمود المماس کہیچا گیا ہی تو محددین اوس نقطہ کے دریافت کرو جہان وہ خط منحنی سے دوبارہ ملتا ہی اور طول وتر کا جو اوسکی مابین واقع ہوتا ہی

(۲۱) اگر عمود المماس نقطہ ع کا خط منحنی سے دوبارہ نقطہ ق پر ملتا ہی اور ص ع = ن اور نقطہ ع کے مماس پر جو عمود ص سی نکالا جاوے وہ ہو تو ع ق = ۴ ع ن ق / ن − ط

(۲۲) قریب البیضوی مین ع ایک نقطہ ہی اور ا راس ہی اور نقطہ ا سی عمود مماس پر جو نقطہ ع پر مس کرتا ہی نکالا گیا ہی اور نقطہ ع سی ایک خط متوازی محور کا نکالا گیا ہی اور اسیطرح سے خطوط کہیچے گئے نقطہ ق پر ملتے ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط نقطہ ق کا خط مستقیم ہی اور نیز مساوات مقام النقاط ق کی بہی دریافت کرو اور ق نقطہ تقاطع عمود کا جو ا سے کہیچا جای اور معین نقطہ ع کا

(۲۳) ع ق وتر قریب البیضوی کا ہی ع ت مماس نقطہ ع پر ہے اور ایک خط متوازی محور قریب البیضوی کا مماس کو نقطہ ت پر اور قوس ع ق کو نقطہ ی پر اور وتر ع ق کو نقطہ ف پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو

ت ی : ی ف : : ع ف : ف ق

(۲۴) قریب البیضوی مین جسکی مساوات ی² = ۴ ط لا ہی اوسکی دو دو مماس کہیچے گئی ہین اون نقطون کی جنکی محددین مین نسبت ۱ : ن ہی تو ثابت کرو کہ اونکی تقاطع کی مقام النقاط کی مساوات ذیل ہوگی جب نقطی محورون کے ایک ہی جانب مین ہون ی² = ( ن^۱/۴ + ن^-۱/۴ )² ط لا اور جب نقطے مختلف جانب مین ہون تو یہہ مساوات ہوگی کہ ی² = − ( ن^۱/۴ − ن^-۱/۴ )² ط لا

(۲۵) ایک قریب البیضوی کی راس سے دو خطوط مستقیم عمود ایک دوسر پر کہیچے گئے ہین اور اون خطوط جن نقاط پر قریب البیضوی سے ملتے ہین اونمین خط ملایا گیا ہی اور اسیطرح ایک مثلث قائم الزاویہ بنایا گیا ہی تو رقبہ اس مثلث کا کم از کم دریافت کرو

(۲۶) ن ق اور ن ق طول کی دو نصف قطر دائرہ کا ہی جو ایک دوسرے پر زاویہ قائمہ بناتی ہین اور راس

قریب البیضوی سی کہچی گئی ہین تو (نق نق) ۴/۳ = ۱۶ ط ۲ (نق ۲/۳ + نق ۲/۳) ۱/۲ ۴/۳

(۲۷) مساوات قریب البیضوی کی قطبیہ اوس حالت مین دریافت کرو کہ خط منتظم کی طرف یا ئین مبدر ہو اور محور خط منحنی کا مقام ابتدائی ہو

(۲۸) اگر خط منتظم کی طرف یا ئین ہی ایک خط کہچا گیا قریب البیضوی کو قطع کری تو جو خط منحنی سے حصص مین اس خط کی بننگی اونکی سطح برابر ہوگی اون حصون کے سطح کے جسمن وتر متوازیہ ماسکہ سے تقسیم ہوتا ہی

(۲۹) قریب البیضوی کی مساوات قطبیہ اوس حالت مین دریافت کرو کہ طرف یا ئین خط منتظم کی مبدر ہو اور مقام ابتدائی خط منتظم ہو

(۳۰) قریب البیضوی مین مجموعہ اوتار متوازیہ کا کہچا گیا ہی اوس نقطہ کا مقام التقاط دریافت کرو جو ان وتروں کو ایسی حصون مین تقسیم کرتا ہی کہ اونکا حاصل ضرب ایک مقدار مستقل ہو

(۳۱) مثلث ا ب س مین اگر س ا س ب = ۲ اور ا ب قائم ہو تو نقطہ س کا مقام التقاط ایک قریب البیضوی ہوگا جسکا راس ا ہی اور ماسکہ ب ہی

(۳۲) عرض مستقیم کے اطراف سی جو مماس نکالے جائین اونکو محور قرار دیکر قریب البیضوی کی مساوات دریافت کرو

(۳۳) مماس نقطہ ل اور عمود المماس کو محور قرار دیکر مساوات قریب البیضوی کی دریافت کرو

(۳۴) قریب البیضوی کے نقطع کے لا و ر محددین مین تو مساوات اوس دائرہ کی دریافت کرو جو قطر ص ع پر مرتسم ہو

(۳۵) ثابت کرو کہ دائرہ جو قطر ص ع پر مرتسم ہوگا راس کی مماس کو مس کرتا ہی

(۳۶) اگر خط ر = م (لا − ط) قریب البیضوی سی (لاَ و رَ) (لاً و رً) پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ لاَ + لاً = ۲ط + ۴ط/م۲ اور لاَ لاً = ط۲ اور رَ + رً = ۴ط/م اور رَ رً = −۴ط۲

(۳۷) وتر ماسکہ قریب البیضوی پر دائرہ کہچا گیا ہی اسطرح سی کہ وتر اوسکا قطر ہی اگر م مماس زاویہ میلان اس وتر اور محور لا کا ہو تو مساوات دائرہ کی یہہ ہے کہ

جو مماسون اور وتر سے بنتی ہین $\frac{(ق^2 - 4 ط ح)}{ط^2}$ ہوگا

(۵۰) ایک وتر ماسکہ کے اطراف سے ت ع اور ت ع مماس کھیچے گئے ہین اور ع ح اور ع ح عمود المماس اونہین نقطون کے ہین تو ثابت کرو کہ $\frac{1}{ع ح^2} + \frac{1}{ع ح^2}$ ایک مقدار مستقل ہی اور عمود المماس کے محاذی زاوی نقطہ ت پر برابر ہین

(۵۱) دو مساوی قریب البضوی متحد المحور ہین لیکن اونکی راس منطبق نہین ہوتی اور اندر کے خط منحنی مین کوئی نقطہ ط لیکر دو وتر باہر کے خط منحنی کے ع ط ع اور ق ط ق ایک دوسرے کے ساتھہ زاوے قائمی بناتی ہوئی کھیچین مین تو $\frac{1}{ع ط . ط ع} + \frac{1}{ق ط . ط ق}$ ایک مقدار مستقل ہے

(۵۲) قریب البضوی کے وتر پر دائرہ کھیچا گیا محور کو مس کرتا ہی تو ثابت کرو کہ اگر زاویہ میلان وتر کا محور کے ساتھہ ہو اور ۲ ط عرض مستقیم قریب البضوی کا ہو اور س نصف قطر دائرہ کا ہو تو

$$مس\ ر = \frac{ط}{س}$$

(۵۳) اگر را ور زاوئی میلان محور قریب البضوی اور دو مماسون کے ہون جو نقطہ (ح و ق) پر گذرتا ہے تو ثابت کرو کہ مس ر + مس ر = $\frac{ق}{ح}$ اور مس ر مس ر = $\frac{ط}{ح}$

(۵۴) اگر دو مماس قریب البضوی کے کھیچے جائین ایسی کہ مجموعہ زاویون کا جو وہ محور کے ساتھہ بناتین مستقل ہو تو اونکے تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا جو ماسکہ پر گذریگا

(۵۵) ثابت کرو کہ دو مماس نقطہ (ح و ق) پر جو گذرتی ہین اس مساوات سی تعبیر ہوتی ہین کہ

$$ح (ی - ق)^2 - ق (ی - ق) (لا - ح) + ط (لا - ح)^2 = ۰$$

$$یا\ (ق^2 - 4 ا ح) (ی^2 - 4 ط لا) = [ق ی - 2 ی (لا + ح)]^2$$

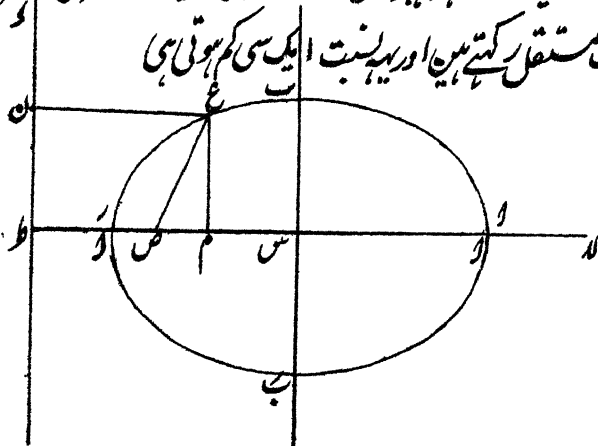
(۵۶) (ح و ق) سے جو مماس قریب البضوی کی کھیچے جائین اور اونکی نقطہ ط مماس اور راس مین خطوط ملائین جائین تو وہ اس مساوات سی تعبیر ہونگے کہ

$$ح ی^2 = 2 لا (ق ی - 2 ط لا)$$

## باب نہم

### بیضوی

(۵۸) مساوات بیضوی کی دریافت کرو

بیضوی مقام النقاط ایک نقطہ کا ہوتا ہے جو اسطرح حرکت کرتا ہے کہ ایک نقطہ معیّن اور خط معیّن سے اوسکی فاصلے نسبت مستقل رکھتے ہین اور یہہ نسبت ایک سی کم ہوتی ہی



فرض کرو کہ ص نقطہ معیّن اور ی یَ خط معیّن ہے ص ط عمود ی یَ پر نکالو اور ط مبدا اور ط ص سمت محور لا کی ہے اور ط ی سمت محور ی کی مانو

فرض کرو کہ ع ایک نقطہ مقام النقاط کا ہی ملاؤ ص ع اور ع م متوازی ط ی کا اور ع ن متوازی ط لا کا نکالو اور فرض کرو کہ ط ص = ع اور ص ع اور ع ن کی نسبت کو ی سی تعبیر کرو اور نقطہ ع کے محددین کو لا اور ی سے تعبیر کرو

بموجب حدود کے ص ع = ی . ع ن

∴ ص ع$^2$ = ی$^2$ . ع ن$^2$

∴ ع م$^2$ + ص م$^2$ = ی$^2$ ع ن$^2$

یعنی ی$^2$ + (لا − ع)$^2$ = ی$^2$ لا$^2$

اس مبدا اور محور کے موافق جو ہم نے فرض کی ہین یہہ مساوات بیضوی کی ہوگی

(۱۵۹) مساوات بیضوی کی اوس حالت مین کہ وہ محور لا سی ملتی ہو دریافت کرو ی = ۰ کی مساوات بیضوی مین لکھو تو

(لا − ع)$^2$ = ی$^2$ لا$^2$

∴ لا − ع = ± ی لا

∴ لا = $\frac{\text{ع}}{1 \mp \text{ی}}$

فرض کرو کہ ط اَ = $\frac{\text{ع}}{1+\text{ی}}$ اور ط ا = $\frac{\text{ع}}{1-\text{ی}}$ تو ا و اَ نقطہ بیضوی پر ہونگی ا ا اور اَ کو بیضوی کی راس کہتی ہین اور ا اور اَ کی درمیان جو نقطہ وسط ہوتا ہے اسے مرکز بیضوی

(۱۶۰) مساوات بیضوی کی آسان صورت مبدء کو اَ یا م مین بدل کر دریافت کرتی ہین

**اول** فرض کرو کہ مبدء اَ ہی

چونکہ ط اَ = $\frac{\text{ع}}{1+\text{ی}}$ اور قیمت لا = لاَ + $\frac{\text{ع}}{1+\text{ی}}$ کو مساوات

$\text{ر}^2 + (\text{لا} - \text{ع})^2 = \text{ی}^2\,\text{لا}^2$ مین رکھو تو

$$\text{ر}^2 + \left(\text{لاَ} + \frac{\text{ع}}{1+\text{ی}} - \text{ع}\right)^2 = \text{ی}^2\left(\text{لاَ} + \frac{\text{ع}}{1+\text{ی}}\right)^2$$

$$\text{یا}\quad \text{ر}^2 + \left(\text{لاَ} - \frac{\text{ی}\,\text{ع}}{1+\text{ی}}\right)^2 = \text{ی}^2\left(\text{لاَ} + \frac{\text{ع}}{1+\text{ی}}\right)^2$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 + \text{لاَ}^2 - \frac{2\,\text{لاَ}\,\text{ی}\,\text{ع}}{1+\text{ی}} = \text{ی}^2\left(\text{لاَ}^2 + \frac{2\,\text{ع}\,\text{لاَ}}{\text{ی}(1+\text{ی})}\right)$$

$$\therefore\ \text{ر}^2 = 2\,\text{ع}\,\text{ی}\,\text{لاَ} - (1-\text{ی}^2)\,\text{لاَ}^2$$

$$= (1-\text{ی}^2)\left(\frac{2\,\text{ع}\,\text{ی}\,\text{لاَ}}{1-\text{ی}^2} - \text{لاَ}^2\right)$$

بعد ا اَ = $\frac{\text{ع}}{1-\text{ی}} - \frac{\text{ع}}{1+\text{ی}} = \frac{2\,\text{ی}\,\text{ع}}{1-\text{ی}^2}$ اسکو ہم اگر ۲ط سی تعبیر کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہو جائیگی

$$\text{ر}^2 = (1-\text{ی}^2)(2\,\text{ط}\,\text{لاَ} - \text{لاَ}^2)$$

مبدء کو اس اَ پر یاد رکھکر زبر لا پر سے اڑا دو تو مساوات یہہ حاصل ہوگی

$$\text{ر}^2 = (1-\text{ی}^2)(2\,\text{ط}\,\text{لا} - \text{لا}^2) \quad\text{———}\quad (1)$$

**دوم** فرض کرو کہ س مبدء ہے

چونکہ اَ س = ط ہم قیمت لا = لاَ + ط کو مساوات (۱) مین رکھین تو

$$\text{ر}^2 = (1-\text{ی}^2)\left[\left(2\,\text{ط}(\text{لاَ}+\text{ط})\right) - (\text{لاَ}+\text{ط})^2\right]$$

$$= (1-\text{ی}^2)(\text{ط}^2 - \text{لاَ}^2)$$

اگر مبدء کا مرکز یہہ ہونا یاد رکھکر لا پر سی زبر کو الگ کرین تو مساوات کی یہہ صورت ہوگی

$$\text{ر}^2 = (1-\text{ی}^2)(\text{ط}^2 - \text{لا}^2) \quad\text{———}\quad (2)$$

(۲) مین فرض کرین لا = ۰ تو $\text{ر}^2 = (1-\text{ی}^2)\,\text{ط}^2$ اور پھر ہم معین س ب کو ص سے تعبیر کرین تو $\text{ص}^2 = (1-\text{ی}^2)\,\text{ط}^2$ پس (۱) کی صورت یہہ ہوگی کہ

$ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(۲ط\,لا - لا^2)$ ———— (۳)

اور (۲) کی یہہ صورت ہوگی کہ $ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا^2)$ ———— (۴)

یا زیادہ بالتفریق $\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} = ۱$ یعنی $ط^2ی^2 + ص^2لا^2 = ط^2ص^2$ —— (۵)

(۱۶۱) چونکہ $اَص = ی \cdot طاَ$ اور $طاَ = \frac{ع}{۱+ی}$ اسسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$اَص = \frac{ی\,ع}{۱+ی} = \frac{(۱-ی)\,ی\,ع}{۱-ی^2} = ط\,(۱-ی)$$

$$طاَ = \frac{ع}{۱+ی} = \frac{ط\,(۱-ی)}{ی}$$

$$ص\,س = اَس - اَص = ط - ط\,(۱-ی) = ط\,ی$$

$$طس = اَس + طاَ = ط + \frac{ط\,(۱-ی)}{ی} = \frac{ط}{ی}$$

$$طص = ع = \frac{ط\,(۱-ی^2)}{ی}$$

(۱۶۲) اب ہم شکل بیضوی کی ہیئت دریافت کرتے ہین — مساوات جسمین مبدا مرکز ہو لکھو

$ی^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا^2)$ ———— (۱)

لا کی قیمت کے واسطے جو ط سے کم ہو ی کی دو قیمتین ہین جو مقدار مین مساوی اور علامت مین مختلف

اسسے معلوم ہوا کہ اگر ع ایک نقطہ خط منحنی کے ایک جانب مین محور لا کی ہو تو ضرور دوسرا نقطہ

محور لا کی دوسری جانب متقابل ہین ایسا ہوگا کہ ع م = ع م کی ہو اسسے معلوم ہوا کہ بلحاظ محور لا کے خط منحنی قرینہ رکھتا ہی - جو قیمتین لا کی ط سی زیادہ ہون ادنکی واسطے کوئی قیمت ممکن ی کی نہین نکلتی اسسے ثابت ہوا کہ س آ جو نکہ برابر ط کی ہے اسلئے خط منحنی نقطہ آ کی جانب راست مین نہین پہیلتا

اگر لا کی قیمتین نفی اور ط کے درمیان مقرر کرین تو ہمکو ی کی دو قیمتین ایسی ہی دریافت ہونگین جیسی کہ لا کی مثبت قیمتین اور ط کے درمیان مقرر کرنے سے حاصل ہوئی تہین - اسسے ثابت ہوا کہ خط منحنی کے حصے ی ی کے دائین بائین متشابہ اور ایک صورت کے ہین اور جو نکہ مساوات (۲) کی اس صورت مین لکہی جاسکتی ہے کہ

لا = ط/ص (ص − ی) ——— (۲)

اسسے معلوم ہوا کہ محور ی ہی خط منحنی کو قرینہ کے ساتھہ تقسیم کرتا ہی اور خط منحنی نقاط ب و بَ سے پرے نہین پہیلتا ہی س ب اور س بَ ہر ایک = ص کی ہی

خط ی کَ خط منتظم ہے اور ص اوسکی مطابق ماسکہ ہی

جو نکہ خط منحنی بلحاظ س ی کے قرینہ سی واقع ہی اوسسے یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ اگر س م س ہ = س ص کے اور س ہَ = س ہ مقرر کرین اور ی کَ عمود س ی پر نکالین تو نقطہ ہ اور خط ی کَ دوسرا ماسکہ اور خط منتظم بنے گا اور اس وساطت سی ہی خط منحنی پیدا ہو سکتا ہی

(۱۶۳) نقطہ س کا نام مرکز بیضوی اس سبب سے ہی کہ ہر ایک وتر بیضوی کا جو نقطہ س پر گذرتا ہے اوسپر تنصیف ہوتا ہی - اور اس تنصیف ہونیکی دلیل ہی کہ (ح و ق) ایک نقطہ خط منحنی پر فرض کرو تو مساوات

$$\frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} = 1$$

کے شرائط ان قیمتون سے کہ لا = ح اور ی = ق پوری ہوتی ہین تو (− ح و − ق) بہی ایک نقطہ خط منحنی پر ہوگا اسلئے کہ لا = ح اور ی = ق شرائط مساوات کو پورا کرتی ہن تو ظاہر ہی کہ لا = − ح اور ی = − ق کی بہی مساوات کی شرائط کو پورا کرینگی اسسے معلوم ہوا کہ خط

منحنی پر جو نقطہ ع ہو اوسکی مطابق نقطہ ع ربعہ مقابل مین ایسا ضرور ہوگا کہ ع س ع خط مستقیم ہوگا اور ع س = ع س اسواسطے ہر ایک وتر جو نقطہ س پر گذرتا ہی اوس سے تنصیف ہوتا ہے

(۱۶۴) ہمنے محور لا کی جانب مین خط منحنی کی مجوف طرف مرتسم کی ہی یہہ دعوی بیضوی کی شکل کو درست بنادیگا کہ جو نقطہ خط منحنی کا درمیان راس اور کسی ایک نقطہ قائم خط منحنی کے واقع ہو اوسکا معین بڑا اوس خط مستقیم کے نقطہ کے معین سے ہوگا جو راس اور نقطہ قائم کے درمیان واقع ہی اور یہہ نقطے التناظر لیے جاینگے

فرض کرو کہ ا راس ہو اور اوسکو مبدء قرار دو اور ع نقطہ قائم ہو اور لا و ی اوسکی محددین تو مساوات بیضوی کے موافق (۱۶۰) کے یہہ ہوگی کہ

$$ی'^2 = \frac{ص^2}{ط^2}(2\,ط\,لا' - لا'^2)$$

اور مساوات اع کی یہہ ہی $ی = \frac{ی'}{لا'}\,لا$ یا $ی = \frac{ص}{ط}\sqrt{\frac{2ط}{لا'} - 1}\;لا$ اسلیے کہ (لا' ی') بیضوی پر ہین

فرض کرو کہ لا اوس محدد کو تعبیر کرتا ہی جو کم بہ نسبت لا' کے ہی تو اس سبب سی کہ معین خط منحنی کا $\frac{ص}{ط}\sqrt{2\,ط\,لا - لا^2}$ یعنی $\frac{ص}{ط}\sqrt{\frac{2ط}{لا} - 1}\;لا$ ہی اور معین خط مستقیم کا $\frac{ص}{ط}\sqrt{\frac{2ط}{لا'} - 1}\;لا$ اس سے ظاہر ہے کہ معین خط منحنی کا بڑا بہ نسبت خط کے معین کے ہے

(۱۶۵) ا ا' اور ب ب' محور بیضوی اور محور ا ا' جسمین دونو ماسکہ ہین محور اعظم اور بعض اوقات محور متقاطع اور ب ب' کو محور اصغر اور بعض اوقات محور مزدوج کہتے ہین بیضوی کے کسی نقطہ کا بعد ماسکہ جو نسبت خط منتظم کے بعد سے رکھتا ہی اوسی بیضوی کی نسبت خارج المرکز کہتے ہین اور اوسکو ہم نی رمز ی سے تعبیر کیا ہی

دفعہ ۱۲۸ کو دیکھو ہم عرض مستقیم دریافت کرنا چاہتے ہین ہم لا = س ہ یعنی = ط ی کی مساوات (۱) دفعہ ۱۶۲ مین لکھتے ہین پس

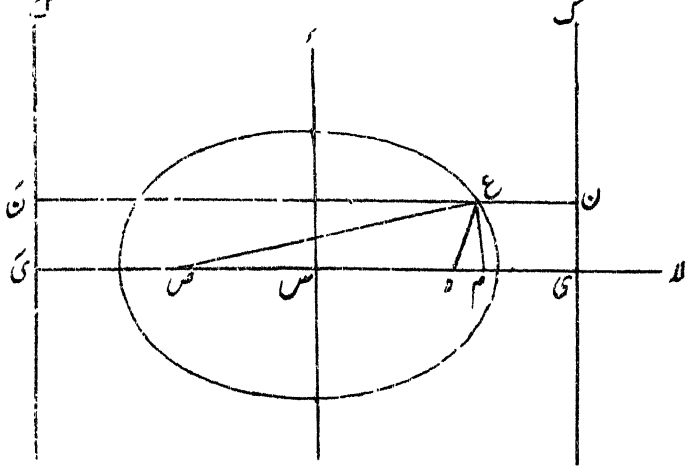
$$ی^2 = \frac{ص^2\,ط^2(1 - ی^2)}{ط^2} = \frac{ص^4}{ط^2}$$

$$\therefore\; ل\,ہ = \frac{ص^2}{ط} \quad \text{اور عرض مستقیم} = \frac{2\,ص^2}{ط}$$

چونکہ $ص^2 = ط^2 - ط^2 ی^2 \;\therefore\; ص^2 + ط^2 ی^2 = ط^2$ یعنی

$$س\,ت^2 + س\,ہ^2 = ط^2$$

علی ہذا القیاس $ب\,ص = ط$

(۱۶۶) کسی نقطہ بیضوی کی ابعاد ماسکہ کو اوس نقطہ کے معینوں کی رقموں میں بیان کرو

فرض کرو کہ ص نقطہ ماسکہ ہو اور ی ک خط منتظم ہو اور ہ دوسرا ماسکہ ہو اور اوسکی موافق یَ کَ خط منتظم اور بیضوی پر نقطہ ع ہو اور لا، ی اوسکے محددین ہوں اور مرکز اوسکا مبدء ہو تو لا = س م اور ن ع اور نَ ع ن متوازی محور اعظم کا کھینچو اور ع م عمود اوسپر نکالو

تو ص ع = ی . ع نَ = ی (یَ س + س م) = ی (ط/ی + لا) = ط + ی لا

اور نیز ہ ع = ی . ع ن = ی (س ی − س م) = ی (ط/ی − لا) = ط − ی لا

اسسے معلوم ہوا کہ ص ع + ہ ع = ۲ط یعنی بیضوی کے کسی نقطہ کی ابعاد ماسکہ کا مجموعہ برابر محور اعظم کے ہوتا ہی

(۱۶۷) مساوات م² = (ص²/ط²) (ط² − لا²) اسطرح لکھی جا سکتی ہے کہ

م² = (ص²/ط²) (ط − لا) (ط + لا)

(شکل دفعہ ۱۶۲ کی دیکھو) ع م² / (اَ م . م ا) = ب س² / ا س²

(۱۶۸) بیضوی کے محور اعظم پر دائرہ کھینچا جاے تو اوسکی مرکز کو مبدء قرار دیں تو اوسکی مساوات یہ ہوگی

م² = ط² − لا²

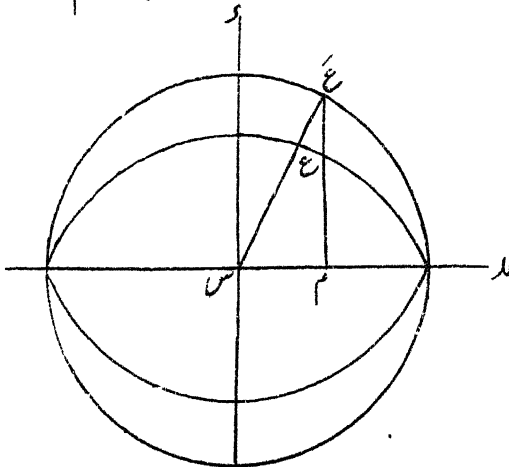
اسسے معلوم ہوا کہ معین م ع بیضوی کا خارج ہو کر دائرہ سے عَ پر ملے تو

تو $\text{ع م}^{۲} = \frac{\text{ص}^{۲}}{\text{ط}^{۲}} \, \text{عَ م}^{۲}$

$$\therefore \frac{\text{ع م}}{\text{عَ م}} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}}$$

عَ اور س مرکز بیضوی کے درمیان خط ملاؤ اور فرض کرو کہ $\overline{\text{عَ س م}} = \text{بر}$ اور نقطہ ع کی محددین لا اور ر ہین تو $\text{لا} = \text{س عَ جم بر} = \text{ط جم بر}$

$$\text{ر} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}} \, \text{عَ م} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}} \, \text{ط جب بر} = \text{ص جب بر}$$

یہہ قیمتین لا اور ر کی بعض اوقات سوالات کے حل کرنے مین کام آتی ہے

زاویہ $\overline{\text{عَ س م}}$ کو زاویہ خارج المرکز نقطہ ع کا کہتے ہین

(۱۶۹) دفعہ ۱۶۰ کے موافق مساوات بیضوی کی جسکا راس مبدء ہو

$$\text{ر}^{۲} = ۲\,\text{ع ی لا} - (۱ - \text{ی}^{۲})\,\text{لا}^{۲}$$

اگر ہم فرض کرین کہ ی = ۱ تو اس مساوات کی یہہ شکل ہو جاۓگی

$$\text{ر}^{۲} = ۲\,\text{ع لا}$$

یہہ مساوات قرب البیضوی کی ہی جسکا عرض مستقیم ۲ع ہی اور نیز بیضوی مین

$$\text{ط} = \frac{\text{ی ع}}{۱ - \text{ی}^{۲}} \quad \text{اور} \quad \text{ص} = \text{ط}\sqrt{۱ - \text{ی}^{۲}} = \frac{\text{ی ع}}{\sqrt{۱ - \text{ی}^{۲}}}$$

$$\text{یا} \quad \text{ط}\,(۱ - \text{ی}) = \frac{\text{ی ع}}{۱ + \text{ی}}$$

اگر ہم ی = ۱ کے مقرر کرین تو ط اور ص لا انتہا ہونگے اور

$$\text{ط}\,(۱ - \text{ی}) = \frac{\text{ع}}{۲}$$

پس اگر ہم فرض کرین کہ راس اور ماسکہ قریبہ کے درمیان بعد مستقل ہی اور نسبت خارج المرکز ہمیشہ ایک کی قریب ہوتی جاتی ہے اور محور اعظم و اصغر بیضوی کے لاانتہا زیادہ ہوتی ہی تو بیضوی کی شکل قریب البیضوی کی سی ہوتی جائیگی

اسے معلوم ہوا کہ جو خاصیت بیضوی کی ثابت ہو اوسیکی مماثل خاصیت قریب البیضوی مین تلاش کرنی جاہئے اور اس تلاش مین کہ راس بیضوی مبدء ٹہرایا جاوی اور یہہ دیکہا جاوی کہ اگر ی ہمیشہ ایک کی قریب ہوتی جاتی ہی اور بعد راس اور ماسکہ قریبہ کی درمیان ہمیشہ مستقل رہتا ہی تو کیا کیا نتائج پیدا ہوتی ہین

## مماس اور عمود المماس بیضوی

(۱۷۰) بیضوی کے کسی نقطہ پر جو مماس ہو اوسکی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹۰ کا حدود دیکہو)

فرض کرو کہ $\text{لا}'$ و $\text{ی}'$ نقطہ کی محددین ہون

$\text{لا}''$ و $\text{ی}''$ متصل کے نقطہ کے محددین اوسی خط منحنی پر ہون

تو خط قاطع مساوات جو ان نقطون پر گذرتا ہی یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'}\left(\text{لا} - \text{لا}'\right) \qquad (۱)$$

اور چونکہ $(\text{لا}' \text{ و } \text{ی}')$ اور $(\text{لا}'' \text{ و } \text{ی}'')$ نقطے بیضوی پر ہین تو

$$\text{ط}^2 \text{ی}'^2 + \text{ص}^2 \text{لا}'^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

$$\text{ط}^2 \text{ی}''^2 + \text{ص}^2 \text{لا}''^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{ط}^2 \left(\text{ی}''^2 - \text{ی}'^2\right) + \text{ص}^2 \left(\text{لا}''^2 - \text{لا}'^2\right) = ۰$$

$$\therefore \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'} = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} \cdot \frac{(\text{لا}'' + \text{لا}')}{(\text{ی}'' + \text{ی}')}$$

اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) اسطرح لکہی جاسکتی ہی کہ

$$\text{ی} - \text{ی}' = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} \cdot \frac{\text{لا}'' + \text{لا}'}{\text{ی}'' + \text{ی}'}\left(\text{لا} - \text{لا}'\right)$$

لیکن مقام محدودہ مین $\text{لا}'' = \text{لا}'$ اور $\text{ی}'' = \text{ی}'$ اسے معلوم ہوا کہ مساوات مماس کے $(\text{لا}' \text{ و } \text{ی}')$ کے نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{ی}' = -\frac{\text{ص}^2 \text{لا}'}{\text{ط}^2 \text{ی}'}\left(\text{لا} - \text{لا}'\right) \qquad (۲)$$

$\text{ط}^2 \text{ی}'$ مین ضرب دینے سی یہہ مساوات اس طرح سادی بن سکتی ہی کہ

$$\text{ط}^2 \text{ی}\,\text{ی}' + \text{ص}^2 \text{لا}\,\text{لا}' = \text{ط}^2 \text{ی}'^2 + \text{ص}^2 \text{لا}'^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

(۱۷۱) یہہ مساوات مماس کی اوس زاویہ کی مماس کی رقمون مین جو خط محور اعظم بیضوی سے بناتا ہی نہایت آسانی سی بیان ہو سکتی ہے

اسواسطے کہ مساوات مماس کی (لاَ و یَ) پر یہہ ہا کہ

$$ط^2 ی یَ + ص^2 لا لاَ = ط^2 ص^2$$

یعنی $ی = -\frac{ص^2 لاَ}{ط^2 یَ} لا + \frac{ص^2}{یَ}$

اب فرض کرو کہ $-\frac{ص^2 لاَ}{ط^2 یَ} = م$ تو مساوات یہہ ہوجائیگی کہ

$$ی = م لا + \frac{ص^2}{یَ}$$

بس اب ہم کو $\frac{ص^2}{یَ}$ کو مماس کی رقمون مین بیان کرنا باقی رہا

اب $ص^2 لاَ = -ط^2 یَ م$

$$\therefore ط^2 یَ^2 + \frac{ط^4 م^2 یَ^2}{ص^2} = ط^2 ص^2$$

$$\therefore یَ^2 (ط^2 م^2 + ص^2) = ص^4$$

$$\therefore \frac{ص^2}{یَ} = \sqrt{ط^2 م^2 + ص^2}$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مماس کی اسطرح لکہی جاسکتی ہے کہ

$$ی = م لا + \sqrt{ط^2 م^2 + ص^2}$$

برعکس اسکے جس خط کی مساوات اس صورت کی ہو وہ مماس بیضوی کا ہی دفعہ ۹۳ و ۹۴ کی طرح سے ثابت ہوسکتا ہی کہ بیضوی کے کسی نقطہ پر مماس بیضوی سے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہی اور جو خط بیضوی سی ایک نقطہ پر ملتا ہی وہ بیضوی کا مماس اوس نقطہ پر ہے

(۱۷۲) ایک محور کی اطراف سی جو مماس بیضوی کے نکالی جائین وہ متوازی دوسرے محور کے ہونگے

اسواسطے کہ محددین نقطہ آ کے ط اور ۰ ہین شکل دفعہ ۱۶۲ کی دیکہو اسے معلوم ہوا کہ

لاَ = ط اور یَ = ۰ کے لکہنے سے مساوات

$ط^2 ی یَ + ص^2 لا لاَ = ط^2 ص^2$ کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

$$لا = ط$$

یہہ مساوات اوس خط کی ہے جو نقطہ آ سے متوازی س ی کا ہی - علی ہذا القیاس مماس نقطہ اَ پر متوازی س ی کا ہی اور مماس نقاط ب اور بَ پر متوازی س لا کے ہین

(۱۷۳) بیضوی کے کسی نقطہ کے عمود المماس کی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۹۷ کی حد دیکہو)

فرض کرو کہ کسی نقطہ کے محددین لاَ و یَ ہین تو مساوات مماس کے اوس نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

$$ی = -\frac{ص^2 لاَ}{ط^2 یَ} لا + \frac{ص^2}{یَ} \quad \text{———} \quad (۱)$$

اور مساوات اوس خط کی جو لاَ و یَ پر گذرتا ہی اور عمود مساوات (۱) پر ہی یہہ ہوگی کہ

$$ی - یَ = \frac{ط^2 یَ}{ص^2 لاَ}(لا - لاَ) \quad \text{———} \quad (۲)$$

یہہ مساوات عمود المماس نقطہ (لاَ و یَ) کی ہے

(۱۷۴) مساوات کسی نقطہ کی عمود المماس کی اوس زاویہ کی مماس کی رقموں مین جو وہ خط محور اعظم بیضوی کی ساتھہ بناتا ہی نہایت آسانی سی بیان ہوسکتی ہی

مساوات عمود المماس نقطہ (لاَ و یَ) کی

$$ی = \frac{ط^2 یَ}{ص^2 لاَ} لا - \left(\frac{ط^2}{ص^2} - ۱\right) یَ \quad (۱)$$

فرض کرو کہ $\frac{ط^2 یَ}{ص^2 لاَ} = م$ تو مساوات اس شکل کی ہوجائیگی کہ

$$ی = م لا - \frac{ط^2 - ص^2}{ص^2} یَ \quad (۱)$$

پس اب $\frac{ط^2 - ص^2}{ص^2} یَ$ کو م کی رقموں مین بیان کرنا رہا

اب $ص^2 لاَ = \frac{ط^2 یَ}{م}$

اور $ط^2 یَ^2 + ص^2 لاَ^2 = ط^2 ص^2$

$$\therefore ط^2 یَ^2 + \frac{ط^4 یَ^2}{ص^2 م^2} = ط^2 ص^2$$

$$\therefore یَ^2 (ص^2 م^2 + ط^2) = ص^4 م^2$$

اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۱) یہہ ہوجائیگی

$$ی = م لا - \frac{(ط^2 - ص^2) م}{\sqrt{ص^2 م^2 + ط^2}}$$

(۱۷۵) اب ہم دفعات گذشتہ سی بعض خواص بیضوی کے استنباط کرتے ہین

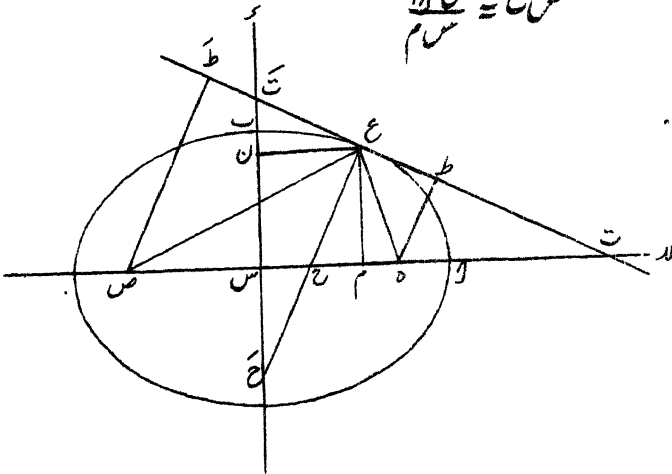
فرض کرو کہ لاَ و یَ محددین نقطہ ع کی ہین اور ع ت مماس نقطہ ع پر ہے اور ع ح عمود المماس نقطہ ع پر ہے اور ع م اور ت ن عمود محوروں پر ہین

تو مساوات مماس کی نقطہ ع پر یہہ ہے کہ

ط$^2$ ی ی' + ص$^2$ لا لا' = ط$^2$ ص$^2$

فرض کرو کہ ی = ۰ تو لا = ط$^2$ / لا' اسے معلوم ہوا کہ

∴ س ت = س ا$^2$ / س م

∴ س م . س ت = س ا$^2$

اور علیٰ ہذا القیاس اگر مماس نقطہ ع پر س ی سے نقطہ ت' پر ملے تو

س ن . س ت' = س ب$^2$

(۱۷۶) نقطہ ع کے عمود المماس کی مساوات یہہ ہی کہ

ی − ی' = (ط$^2$ ی' / ص$^2$ لا') (لا − لا')

اور نقطہ ح جہاں عمود المماس محور اعظم کو قطع کرتا ہی اوسکے لئے ی = ۰ اسے ثابت ہوا کہ مساوات بالا سے یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

لا − لا' = − ص$^2$ لا' / ط$^2$

∴ لا = لا' (۱ − ص$^2$ / ط$^2$) = ی$^2$ لا'

پس س ح = ی$^2$ . س م

اور نقطہ ح' پر عمود المماس محور اصغر کو قطع کرتا ہی تو لا = ۰ اسے معلوم ہوا کہ مساوات بالا

$$ی = ی' - \frac{ط^2 ی'}{ص^2} = - \frac{ط^2 ی'}{ص^2} \cdot ی'$$

$$پس\ س ح = \frac{ط^2 ی^2}{ص^2} \cdot ع م$$

(۱۷۷) طول ع ح اور ع ح′ کا نقطہ ع کے ابعاد ماسکہ کی رقموں میں آسانی سے بیان ہو سکتا ہی

$$ع ح^2 = ع م^2 + ح م^2$$
$$= ی'^2 + (لا' - ی^2 لا')^2$$
$$= ی'^2 + لا'^2 (۱ - ی^2)^2$$
$$= ی'^2 + \frac{ص^4 لا'^2}{ط^4}$$
$$= \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا'^2) + \frac{ص^4}{ط^4} لا'^2$$
$$= \frac{ص^2}{ط^2}\left[ط^2 - \left(۱ - \frac{ص^2}{ط^2}\right) لا'^2\right]$$
$$= \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - ی^2 لا'^2)$$

فرض کرو کہ س ع = ق اور ہ ع = ف تو

$$ق = ط + ی لا'\ اور\ ف = ط - ی لا'$$

$$پس\ ع ح^2 = \frac{ص^2 ق ف}{ط^2}$$

علی ہذا القیاس یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ

$$ع ح'^2 = \frac{ط^2 ق ف}{ص^2}$$

(۱۷۸) کسی نقطہ کے ابعاد ماسکہ کے درمیان جو زاویہ ہوتا ہے اوسکو اوسی نقطہ کا عمود المماس تنصیف کرتا ہے

فرض کرو کہ لا′ و ی′ محددین نقطہ ع کی ہیں اور محددین ح کے − ط ی اور ۰ ہیں اس سے معلوم ہوا کہ مساوات س ع کی بموجب دفعہ ۵۳ کے

$$ی = \frac{ی'}{لا' + ط ی}(لا + ط ی) \quad \cdots\cdots (۱)$$

مساوات عمود المماس نقطہ ع کی یہہ ہے کہ

$$ی - ی' = \frac{ط^2 ی'}{ص^2 لا'}(لا - لا')$$

اس سے معلوم ہوا کہ مماس زاویہ ح ص ع کا

$$= \frac{(ط^2 - ص^2)\, لا\, ی + ط^2\, ی\, ی}{ط^2\, ی + ص^2\, لا\, ی + ص^2\, لا\, ی\, ی}$$

$$= \frac{ط^2\, ی\, لا\, ی + ط^2\, ی\, ی}{ط^2\, ص^2 + ص^2\, لا\, ط\, ی} = \frac{ی\, ط\, ی}{ص^2}$$

مساوات ہ ع کی یہہ ہے کہ

$$ی = \frac{ی}{لا - ط\, ی}\,(لا - ط\, ی)$$

اسے معلوم ہوتا ہی کہ مماس زاویہ ح ع ہ کا ہی $= \frac{ی\, ط\, ی}{ص^2}$

$$\therefore\ \overline{ص\, ع\, ح} = \overline{ہ\, ع\, ح}$$

اسے معلوم ہوا کہ ص ع ت = ہ ع ت یعنی مماس کسی نقطہ پر ہو اوسکا میلان ایک ہی زاویہ پر العاد ہوتا ہی

(۱۷۹) دعوی مذکور کا ثبوت اسطرح سے بہی ہو سکتا ہی

بموجب دفعہ ۱۷۶ کے $\overline{س\, ح} = ی\, لا$

$$\therefore\ \overline{ص\, ح} = ط\, ی + ی\, لا$$

$$\text{اور}\ \overline{ہ\, ح} = ط\, ی - ی\, لا$$

اور نیز ص ع = ط + ی لا اور ہ ع = ط − ی لا اسے معلوم ہوا کہ

$$\frac{ص\, ح}{ہ\, ح} = \frac{ص\, ع}{ہ\, ع}$$

اسواسطے بحکم (۳ ش ۶ م) $\overline{ع\, ح}$ زاویہ $\overline{ص\, ع\, ہ}$ کی تنصیف کرتا ہی

(۱۸۰) کسی نقطہ پر ایک خط مماس ہو اور اوسپر ماسکہ سے عمود نکالا جاے تو اس عمود اور مماس کے نقطہ تقاطع کا مقام انتقاط دریافت کرو

فرض کرو کہ $ی = م\, لا + \sqrt{ص^2 + م^2\, ط^2}$ ——— (۱)

مساوات مماس بیضوی کی بموجب دفعہ ۱۷۱ کی ہو تو مساوات عمود کی جو اوس پر ماسکہ سے نکالا جاے یہہ ہوگی (شکل دفعہ ۱۷۵ کو دیکہو)

$$ی = -\frac{1}{م}\,(لا - ط\, ی)$$ ——— (۲)

اگر ہم فرض کریں کہ مساوات (۱) (۲) میں لا و ی کی ایک ہی قیمتیں ہیں اور دونو مساواتوں سے م کو ساقط کریں تو مقام انتقاط مطلوب حاصل ہو جاویگا

مساوات (۱) سے ی − م لا = √(ص² + م² ط²)

مساوات (۲) سے م ی + لا = ط ی

مجذور کرکے جمع کرو تو

(ی² + لا²) (۱ + م²) = ص² + م² ی² + ط² ی²

= ط² (۱ + م²)

∴ ی² + لا² = ط²

یہہ مساوات مقام التقاط مطلوب کی ہی اسے معلوم ہوتا ہی کہ مقام التقاط مطلوب ایک دائرہ ہی جسکا قطر محور اعظم بیضوی کا بنایا گیا ہی ہم نے نقطہ ۃ سے عمود نکالا ہی اگر ہم ص سے ہی عمود نکالئی تو اسی نتیجہ کو حاصل کرتے اسے معلوم ہوا کہ ۃ ط اور ص ط عمود س ط اور س ط پر نکالے جائی تو ہر ایک ہی ٹھیک ط = ط

(۱۸۱) ایک مماس بیضوی کے کسی نقطہ پر ہے اور اوسپر عمود ماسکہ سے نکالا جائی تو طول اس عمود کا دریافت کرو

مساوات مماس کی کسی نقطہ (لا، ی) پر یہہ ہے کہ

ی = − (ص² لا)/(ط² ی) لا + ص²/ی

اور محدد ین ماسکہ ۃ کے ط ی اور ۰ ہین لیکن اگر ع طول عمود کو جو نقطہ (لا، ی) خط ی = م لا + س پر نکالین تعبیر کرے تو

بموجب دفعہ ۷ سہم کے

ع² = (ی − م لا − س)² / (۱ + م²)

صورت حال مین لا = ط ی اور ی = ۰

م = − (ص² لا)/(ط² ی) اور س = ص²/ی

∴ ع² = ((ص² لا ط ی)/(ط² ی) − ص²/ی)² / ((ص⁴ لا²)/(ط⁴ ی²) + ۱) = (ط² ص⁴ (ط − ی لا)²)/(ط⁴ ی² + ص⁴ لا²)

= (ط² ص⁴ (ط − ی لا)² / ط²) / (ط⁴ (ط² ص² − ص² لا²) + ص⁴ لا²) = (ط² ص² (ط − ی لا)²)/(ط² (ط² − ی² لا²))

= ص² (ط − ی لا)/(ط + ی لا) = ص² لو/لو′ (دفعہ ۱۷۷) کی

چونکہ لو′ = ۲ط − لو اسلیے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ ع² = ص² لو/(۲ط − لو)

علی ہذا القیاس اگر ایک خط (لا، ی) کے نقطہ پر مماس ہو اور نقطہ ص سے عمود نکالا گیا ع سے تعبیر ہو تو ہمکو یہہ دریافت ہوگا

غ غً = ...

(۱۸۲) بیضوی کے دو مماس ہر نقطہ بیرونی سے نکل سکتے ہین

فرض کرو کہ مساوات بیضوی کی یہہ ہوگی

$$ط^۲ ی^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲ \qquad (۱)$$

اور ح و ق محددین نقطہ بیرونی کے ہون اور لاً و یً محددین کسی نقطے کے بیضوی پر ہون اور اس نقطہ پر جو مماس نکالا جاوے وہ نقطہ (ح اور ق) پر گذرے تو مساوات مماس کی (لاً و یً) پر یہہ ہوگی کہ

$$ط^۲ ی یً + ص^۲ لا لاً = ط^۲ ص^۲ \qquad (۲)$$

اور چونکہ یہہ مماس نقطہ ح اور ق پر بھی گذرتا ہی اسلئے

$$ط^۲ ق یً + ص^۲ ح لاً = ط^۲ ص^۲ \qquad (۳)$$

اور چونکہ (لاً و یً) بیضوی پر ہی اسلئے

$$ط^۲ یً^۲ + ص^۲ لاً^۲ = ط^۲ ص^۲ \qquad (۴)$$

مساوات (۳) و (۴) سے قیمتین لاً و یً کی معین ہوتی ہین

(۳) سے جو قیمتین نکلین اونکو (۴) مین رکہو تو

$$ط^۲ \left(\frac{ط^۲ ص^۲ - ص^۲ ح لاً}{ط^۲ ق}\right)^۲ + ص^۲ لاً^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$یا\ لاً^۲ (ط^۲ ق^۲ + ص^۲ ح^۲) - ۲ ط^۲ ص^۲ ح لاً + ط^۲ (ص^۲ - ق^۲) = ۰$$

دو قیمتین اس مساوات درجہ دوم کی ممکن ہین اسلئے کہ (ح و ق) کے نقطہ بیرونی ہونے سے

$ط^۲ ق^۲ + ص^۲ ح^۲$ بڑا بہ نسبت $ط^۲ ص^۲$ کے ہے

جن نقطون پر مماس بیضوی کو مس کرتی ہین اون مین جو خط ملایا جاوے اوسکو وتر تماس کہتے ہین

(۱۸۳) ایک نقطہ معلوم سے بیضوی کے مماس کہینچے گئے ہین یہہ مساوات وتر تماس کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ح اور ق نقطہ بیرونی کے محددین ہین اور لا۱ اور ی۱ اوس نقطے کے محددین ہین جسپر ایک مماس بیضوی کو مس کرتا ہی اور لا۲ اور ی۲ محددین دوسرے نقطے کے ہون جسپر دوسرا مماس بیضوی کو مس کرتا ہی مساوات مماس کی (لا۱ و ی۱) پر یہہ ہے کہ

$$ط^۲ ی ی_۱ + ص^۲ لا لا_۱ = ط^۲ ص^۲ \qquad (۱)$$

چونکہ یہہ مماس (ح و ق) پر گذرتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$ط^۲ ق ی_۱ + ص^۲ ح لا_۱ = ط^۲ ص^۲ \qquad (۲)$$

اور علی ہذا القیاس مماس (لا۲ و ی۲) پر نقطہ ح و ق پر گذرتا ہی

$طا^2 ق ی_2 + صا^2 ح لا_2 = طا^2 صا^2$ (۳)

اسسے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ وتر تماس کی یہہ مساوات ہی کہ

$طا^2 ق ی + صا^2 ح لا = طا^2 صا^2$ (۴)

مساوات (۴) ظاہرا ایک خط مستقیم کی مساوات ہی یہہ خط نقطہ لا۱ و ی۱ پر بہی گذرتا ہی اسلئے کہ جب اوسمین قیمتین لا = لا۱ اور ی = ی۱ کی لکہین تو شرایط مساوات کی پوری ہوتی ہین اور مساوات کی صورت مساوات (۲) کی پیدا ہو جاتی ہی اور علی ہذا القیاس یہہ خط نقطہ لا۲ اور ی۲ پر بہی گذرتا ہی اسلئے کہ لا = لا۲ اور ی = ی۲ کی قیمتون رکہنی سی شرایط مساوات پوری ہوتی ہین اسلئے کہ ان قیمتون کے رکہنے سی مساوات کی صورت مساوات (۳) کی سی پیدا ہوتی اسسے ہمکو ایک حکمت مماسونکے کہینچنے کی معلوم ہوئی کہ اول ایک خط کہیچین جو مساوات (۴) کو تعبیر کرے اور پہر یہہ خط جن نقطون پر بیضوی سی ملے اونمین اور نقطہ بیرونی معلوم مین خطوط وصل کرین تو یہہ مماس مطلوب ہونگے

(۱۸۴) ایک نقطہ معین سے بیضوی کے وتر کہیچے گئے ہین اور ہر وتر کی اطراف سی مماس نکالے گئے ہین تو مماسونکے تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

فرض کرو کہ ح و ق محدد ہین اوس نقطہ کی ہین جسسے اوتار کہیچے جاتی ہین اور ان وترون مین سے ایک وتر کے انجامون سے مماس نکالے گئے ہین جو نقطہ (لا۱ و ی۱) پر ملتے ہین — ان مماس کے وتر تماس کی مساوات بموجب دفعہ ۱۸۳ کے یہہ ہوگی کہ

$طا^2 ی ی_1 + صا^2 لا لا_1 = طا^2 صا^2$

لیکن یہہ وتر (ح و ق) پر گذرتا ہے اسواسطے

$طا^2 ق ی_1 + صا^2 ح لا_1 = طا^2 صا^2$

اسسے معلوم ہوا کہ نقطہ (لا۱ و ی۱) خط پر واقع ہے

$طا^2 ق ی + صا^2 ح لا = طا^2 صا^2$

یعنی مماسون کے تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہے

اب اس دعوی کا عکس ثابت کرتے ہین

(۱۸۵) اگر ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ سے دو مماس بیضوی کے کہیچے جائین تو اوتار تماس ایک نقطہ معین ہی پر گذرینگے

فرض کرو کہ ا لا + ب ی + س = ۰ (۱)

مساوات ایک خط مستقیم کی ہو اور (لاَ یَ) ایک نقطہ اس خط پر ہو جسے مماس بیضوی کے کہیے جاتے ہین
تو مساوات وتر تماس کے مطابق اسکے یہہ ہوگی

ط² ی یَ + ص² لا لاَ = ط² ص² (۲)

چونکہ (لاَ یَ) مساوات (۱) پر ہین
ا لاَ + ب یَ + س = ۰
اسواسطے مساوات (۲) اسطرح لکھی جاسکتی ہی کہ

ص² لا لاَ − (ا لاَ + س)/ب ط² ی = ط² ص²

یا (ص² لا − ا ط² ی/ب) لاَ − س ط² ی/ب − ط² ص² = ۰ (۳)

اب خواہ کچہہ ہی قیمت لاَ کی ہو یہہ خط اوس نقطہ پر گذرتا ہی جسکی محددین ان مساواتون سی دریافت ہوتی ہین کہ

ص² لا − ا ط² ی/ب = ۰ اور س ط² ی/ب + ط² ص² = ۰

یعنی نقطہ جسکے واسطے ی = − ب ص²/س اور لا = − ا ط²/س

(۱۸۶) طالب علم کو چاہیے کہ وہ اس بات کو خوب سمجہے کہ اس مساوات کے کیا کیا معنی ہین

ط² ق ی + ص² ح لا = ط² ص²

دفعہ ۱۰۳ مین جو کچہہ دائرہ کی نسبت لکہا گیا ہی وہ بیضوی کی نسبت بہی لکہا جاسکتا ہے

## مثالین

(۱) نسبت خارج المرکز اس مساوات بیضوی کے کیا ہی کہ ۲ لا² + ۳ ی² = س²

(۲) عرض مستقیم کی طرف ل سی جو مماس بیضوی کا نکالا جاوی اوسکی مساوات دریافت کرو (دفعہ ۱۶۳ دیکہو) اور اس مماس کے حصص درمیانی محورون کا طول دریافت کرو

(۳) نقطہ ل کی عمود المماس کی مساوات لکہو

(۴) اگر عمود المماس نقطہ ل کا محور اصغر کی طرف ب َب پر گذری تو بتاؤ بیضوی کی نسبت خارج المرکز کیا ہوگی

(۵) مساواتین ا ب اور س ل کی دریافت کرو (شکل دفعہ ۱۶۲) کی دیکہو اگر یہہ خطوط متوازی ہون تو نسبت خارج المرکز بیضوی کی کیا ہوگی

(۶) ب ہ کی مساوات دریافت کرو اور جس نقطہ پر یہہ بیضوی کو دوبارہ قطع کری اوسکا محددین دریافت کرو

(۷) مساوات ل ل کی دریافت کرو اور نقطہ ل پر ایک خط مماس ہی اس مماس اور

فاصلہ دو چند محور اصغر سے ہو

(۱۸) ثابت کرو کہ طول لینے عمود الماس کا جو بیضوی کے محور اصغر کے کسی نقطہ سی کھچا جاوی اور جس فاصلہ پر مرکز سے ہو اور اوس نقطہ اور خط منحنی کے درمیان واقع ہو یہہ ہوتا ہی کہ

$$\left(\text{ط}^2 + \frac{\text{س}^2}{\text{ی}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(۱۹) اگر بیضوی کے محور اعظم کی طرف ا سے اور نقطہ ماسکہ ط سی خطوط متوازیہ کھیچے جائیں اور م اور ن وہ نقاط ہوں جہاں محور اصغر سے وہ ملیں یا محور اصغر ممدودہ سے تو دائرہ جسکا مرکز م ہی اور نصف قطر ن ا ہی بیضوی کو کیا تو مس کریگا یا بالکل بیضوی سے باہر واقع ہوگا

(۲۰) ایک بیضوی کے محور اعظم کے اطراف ا اور ا' ہیں اور ا ا' ممدودہ سی مماس خط منحنی کا جو نقطہ ع سے نکالا جاوی نقطہ ت پر ملتا ہی اور نقطہ ن سی ایک عمود ا ا' پر نکالا گیا ہی اور ا ع اور ا' ع ممدودہ سی نقاط ق اور ر پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ ق ت = ر ت

(۲۱) اگر ب اور ب' خارج المرکزی زاویے دو نقطوں کے ہوں تو ان نقطوں میں جو وتر ملایا جائیگا اوسکی مساوات یہہ ہوگی کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ط}}\,\text{جم}\,\frac{\text{ب}+\text{ب}'}{2} + \frac{\text{ص}}{\text{ض}}\,\text{جب}\,\frac{\text{ب}+\text{ب}'}{2} = \text{جم}\,\frac{\text{ب}-\text{ب}'}{2}$$

(۲۲) مماس جو کسی نقطہ پر ہو اوسکی مساوات اوس نقطہ کے زاویہ خارج المرکز کی رقموں میں دریافت کرو

(۲۳) ثابت کرو کہ مساوات عمود الماس کی کسی نقطہ پر جسکا خارج المرکزی زاویہ س ہو یہہ ہوگی

$$\text{ط لا قطر ب} - \text{ص ی قم س} = \text{ط}^2 - \text{ص}^2$$

(۲۴) دفعہ ۱۷۶ کو دیکھ کر ثابت کرو مقام التقاط نقطہ وسط ع ح کا ایک بیضوی ہوتا ہی جسکی نسبت خارج المرکزی ہے وہ بیضوی معلوم کی نسبت خارج المرکز سے اسطرح مربوط ہوتی ہے کہ

$$1 - \text{ی}'^2 = (1 + \text{ی}^2)^2\,(1 - \text{ی}^2)$$

(۲۵) خط ہ ب سے جس نقطہ پر مماس نقطہ ل کا قطع ہوتا ہی اوس نقطہ کو دریافت کرو اور بتاؤ نسبت خارج المرکز کی کیا قیمت ہوگی جب یہہ خطوط متوازی ہوں

(۲۶) بیضوی کے نقطہ ع پر ایک مماس خط مستقیم ی ک سی نقطہ ت اور ی' ک سی نقطہ ت' پر ملتا ہے

تو ثابت کرو کہ ت ی ایسا بدلتا ہی جب مماس التمام ع ہ ... کا ادنیٰ ہی ایسا بدلتا ہے جیسے مماس التمام ع ص ہ کا (دفعہ ۱۶۳ کی شکل دیکھو)

(۲۷) اگر خط مستقیم ی = م لا + س بیضوی طا^۲ ی^۲ + صا^۲ لا^۲ = طا^۲ صا^۲ کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ طول وتر کا یہہ ہوگا کہ

۲ طا صا √( (۱ + م^۲) (م^۲ طا^۲ + صا^۲ − س^۲) ) / (م^۲ طا^۲ + صا^۲)

اور پھر ایسی مقادیر مستقل کے درمیان وہ ربط دریافت کرو جس سے یہہ خط مماس بیضوی کا ہو جاے

(۲۸) محددین نقطہ ع کے لا اور ی فرض کر کے ہ ع کے قطر پر جو دائرہ بنایا جاے اوسکی مساوات دریافت کرو

(۲۹) ہ ع کے قطر پر جو دائرہ بنایا جاے اوسے ثابت کرو کہ وہ اوس دائرہ کو مس کرتا ہی جو محور عظیم کے قطر پر دائرہ کھینچا جاے

(۳۰) نقطہ (ح و ق) سے دو مماس بیضوی کے کھینچے گئے ہین تو وتر مماس پر جو عمود ماسکون سے نکالی جائین ان کا مجموعہ دریافت کرو

(۳۱) کوئی معین ع م بیضوی کا خارج کیا گیا ہی اور محور اعظم کو قطر مقرر کر کے جو دائرہ بنایا گیا ہی اوسکو ق پر قطع کرتا ہی اور بیضوی اور دائرہ کے عمود المماس نقطہ ع اور ق کے نقطہ ر پر ملتے ہین تو مقام النقاط نقطہ ر کا دریافت کرو

(۳۲) دو بیضویان متحد المرکز ہین اور اونکی محور متحد السمت ہین اور نیز دونو بیضویون مین مجموع محورون کے مربعون کا بھی ایک ہی ہے تو اونکی مماس مشترک کی مساوات دریافت کرو

(۳۳) نقطہ (ح اور ق) سے دو مماس بیضوی کے نکالی گئی ہین اور وہ ر اور ر' کے زاویون پر محور اعظم کے ساتھہ مائل ہین تو ثابت کرو کہ

مس ر + مس ر' = − ۲ ح ق / (طا^۲ − ح^۲) اور مس ر مس ر' = (صا^۲ − ق^۲) / (طا^۲ − ح^۲)

(۳۴) ایک نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو جسسے مماس ایک بیضوی کے نکالے گئے آپس مین زاویہ قائمہ بناوین

(۳۵) ثابت کرو کہ دو مماس جو ایک بیضوی کے نقطہ (ح و ق) سے نکالے جائین وہ

(طا^۲ − ح^۲) (ی − ق)^۲ + ۲ (ی − ق) (لا − ح) ح ق + (صا^۲ − ق^۲) (لا − ح)^۲ = ۰ سے

یا (طا^۲ ق^۲ + صا^۲ ح^۲ − طا^۲ صا^۲) (طا^۲ ی^۲ + صا^۲ لا^۲ − طا^۲ صا^۲) = (طا^۲ ق ی + صا^۲ ح لا − طا^۲ صا^۲)^۲ سے تعبیر ہوتی ہین

(۳۶) نقطہ (ح اور ق) سے مماس بضوی کے کہیچے گئے ہین ثابت کرو کہ خطوط جو مبدء سے نقاط مماس تک کہیچے گئے ہین اونکے تعبیر ہونگی

$$\frac{لا^2}{ط^4} + \frac{ئ^2}{ص^4} = \left(\frac{لا ح}{ط^2} + \frac{ق ئ}{ص^2}\right)^2$$

(۳۷) دائرہ نصف قطرون کے زوج آپسمین زاویۂ قائمی بناتی ہوئی مرکز بضوی سے کہیچے گئی ہین تو ثابت کرو کہ اونکے طرفون سے جو مماس نکالے جائین اس بضوی مین قطع ہونگی

$$\frac{لا^2}{ط^4} + \frac{ئ^2}{ص^4} = \frac{1}{ط^2} + \frac{1}{ص^2}$$

(۳۸) نقطہ بیرونی ت سے جسکے محددین ح اور ق ہین ایک خط مرکز بیضوی مین بضوی کو نقطہ ر پر قطع کرتا ہوا کہیچا گیا ہی تو ثابت کرو کہ

$$\frac{س ت^2}{س ر^2} = \frac{ط^2 ق^2 + ص^2 ح^2}{ط^2 ص^2}$$

(۳۹) ایک نقطہ بیرونی (ح و ق) سے مماس کہیچی گئی ہین اگر $لا_1$ اور $لا_2$ محدد نقاط مماس کے ہون تو ثابت کرو کہ

$$لا_1 + لا_2 = \frac{2 ح ط^2 ص^2}{ط^2 ق^2 + ص^2 ح^2} \quad اور \quad لا_1 لا_2 = \frac{ط^2(ص^2 - ق^2)}{ط^2 ق^2 + ص^2 ح^2}$$

(۴۰) نقطہ بیرونی (ح اور ق) سے مماس بضوی کے نکالی گئی ہین اور وہ بضوی سے نقاط ع اور ق پر ملتے ہین تو قیمت ہ ع . ہ ق کی دریافت کرو ہ ماسکہ ہی

(۴۱) نقطہ بیرونی ت سے خطوط ت ع اور ت ق بضوی کو ع اور ق مس کرتی ہوئی کہیچے گئے ہین اور س ت بضوی کو نقطہ ر پر قطع کرتا ہی اور ر ن متوازی ہ ت کا محور اعظم سے نقطہ ن پر ملتا ہی تو ثابت کرو ہ ع . ہ ق = ر ن$^2$

(۴۲) دو بضویون کی نسبت خارج المرکزی آپسمین برابر ہین اور محور اونکی متوازی ہین تو ثابت کرو کہ صرف دو ہی نقطی اونمین مشترک ہو سکتی ہین اور یہہ بہی ثابت کرو کہ اگر ایسی تین بضویان ہوت اور دو دو اونمین سے نقاط ع و عَ اور ق و قَ اور ر اور رَ پر تقاطع کرین تو خطوط ع عَ اور ق قَ اور ر رَ ایک نقطہ پر ملینگے

(۴۳) دو متحد المرکز بضویان جنکے محور ایک ہی سمت مین ہین ایک دوسرے کو تقاطع کرتے ہین اور اونکے چار مماس مشترک کہیچے گئے ہین جنسی ایک شکل معین ترکیب پاتی ہین اور نقاط تقاطع بضویون کے

آ ہی یسمین اسطرح ملای گئی ہین کہ مستطیل پیدا ہوا ہی تو ثابت کرو کہ حاصل ضرب اس معین اور مستطیل کے رقبون کا برابر چارون محورون کے نصف حاصل ضرب کے ہی

(۴۴) بضوی کے کسی نقطہ ع کا معین کھچا گیا ہی اور محور اعظم کو قطر تصور کر کے اوسپہ دایرہ کھچا ہی اور اس دایرہ کو وہ معین نقطہ ق پر قطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ ہ کہ ص سے جو عمود اوس مماس پر نکالا جاے جو نقطہ ق سی کھچا جای تو وہ برابر ص ع کی ہوگا

(۴۵) مساوات بضوی کے بلحاظ اون محورون کے دریافت کرو جو محور اصغر کی اطراف سی گذرتی ہین اور محور اعظم کے ایک طرف پر ملتی ہین

(۴۶) اگر ایک خط منحنی $\frac{ط^۲}{لا^۲} + \frac{ص^۲}{ی^۲} = (ط^۲ - ص^۲)$ کے نقاط سی مماس بضوی $\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ی^۲}{ص^۲} = ۱$ کے کھیچے جائین تو وتر مماس عمود المماس بضوی ہوگا

(۴۷) دفعہ ۱۳۸ مین جس طرح دعوی ثابت کیا ہی اوسیطرح دفعہ ۱۸۰ کے دعوی کو ثابت کرو اور نیز دفعہ ۱۳۸ کے دعوی کو اوسیطرح ثابت کرو جس طرح دفعہ ۱۸۰ کی دعوی کو ثابت کیا ہے

(۴۸) مساوات بضوی کی دریافت کرو بساء نقطہ (ح و ق) بضوی پر ہے اور محور بضوی کے محورون کے متوازی ہین

(۴۹) بضوی کے ایک نقطہ ع سے دو وتر ع ق اور ع ق کھیچے گئے ہین اور بضوی سے ق اور ق پر ملتے ہین اگر ح و ق محددین نقطہ ع کے بلحاظ مرکز کے ہون اور م لا + ن ی = ۱ مساوات ق ق کی ہو بلحاظ مبدء نقطہ ع کے ہو تو ثابت کرو کہ ع ق اور ع ق

$$\frac{لا^۲}{ط^۲} + \frac{ی^۲}{ص^۲} + \left(\frac{۲ لا ح}{ط^۲} + \frac{۲ ی ق}{ص^۲}\right)(م لا + ن ی) = ۰$$

سے تعبیر ہوتے ہین اور ع مبدء ہے

(۵۰) فرض کرو کہ ع ایک نقطہ بضوی پر ہے اور ع ع متوازی محور اکبر کا خط منحنی کو نقطہ ع پر قطع کرتا ہوا کھچا گیا ہی اور نقطہ ع سے دو وتر ع ق اور ع ق برابر زاویے محور اعظم بناتی ہوئی کھیچے گئے ہین ملاؤ ق ق تو ق ق متوازی اوس مماس کا ہوگا جو نقطہ ع سی نکالا جاے

(۵۱) مساوات ی = م لا + $\sqrt{م^۲ ط^۲ + ص^۲}$ سے استنباط مماس قرب البضوی کی مساوات کا کرو

(۵۲) دفعہ ۱۷۵ کی شکل مین فرض کرو کہ ح ع نقطہ ق تک ایسا خارج کیا گیا ہی کہ

ح ق = ن ج ع مقام التقاط ق کا دریافت کرو

(۵۳) اگر ع ن دائرہ کا معین ہو اور اسکی موافق قطر اب کے طرف آ سی ا ق کہجا جاے اور ع ن سے نقطہ ق پر اسطرح ملی کہ ا ق = ع ن پس مقام التقاط ن کا اور اوسکے ماسکہ کا مقام دریافت کرو

(۵۴) س ع اور نقطہ ع کے عمود المماس کے درمیان زاویہ جو واقع ہو اوسکا مماس نقطہ ع کے محددین کے ارقام مین دریافت کرو

(۵۵) س ع اور عمود المماس نقطہ ع کی درمیان زاویہ کے مماس کے بڑے سی بڑی قیمت دریافت کرو

(۵۶) ایک بیضوی کا محور اکبر دو چند محور اصغر سے ہی اور ایک خط طول مین برابر نصف محور اعظم کے اس طرح رکہا گیا ہی کہ ایک سرا اوسکا خط منحنی پر اور دوسرا سرا محور اصغر پر تو ثابت کرو کہ نقطہ وسط اس خط کا محور اکبر پر ہوگا

(۵۷) ایک مثلث اسطرح بنایا گیا ہی کہ دو ضلعی اوسکی العاد ماسکہ مین اور تیسرا ضلع محور اکبر بیضوی کا ہے اوسکی اندر جو دائرہ بنایا جای اوسکی مرکز کا مقام التقاط دریافت کرو

(۵۸) بیضوی کے نقطہ ع سی مماس بیضوی کا کہجا گیا ہی اوسپر ص ط اور ہ ط عمود نکالی گئی ہین تو ص ط اور ہ ط پر عمود المماس نقطہ ع پر تقاطع کرینگے

# باب دہم

## اقطار بیضوی کا بیان

(۱۸۷) ایک خط کا طول دریافت کرو جو کسی نقطہ سے سمت معلوم مین بیضوی سے ملتا ہو

فرض کرو کہ لا و ی محددین اوس نقطہ کے ہین جسے خط کہجا گیا ہی اور لا اور ی اوس نقطہ کے محددین ہین جسمین خط کہجا گیا ہی اور زاویہ میلان خط کا محور لا کے ساتھہ ر سی اور نق طول خط کا ہے

تو موجب دفعہ ۲۷ کے لا = لا + نق جم ر اور ی = ی + نق جم ر (۱)

اگر لا اور ی بیضوی پر ہون تو یہہ قیمتین اس مساوات مین رکھی جاسکتی ہین کہ

$$ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2 \quad پس$$

$$ط^2 (ی + نق جب ر)^2 + ص^2 (لا + نق جم ر)^2 = ط^2 ص^2$$

$$\therefore نق^2 (ط^2 جب^2 ر + ص^2 جم^2 ر) + ۲ نق (ط^2 ی جب ر + ص^2 لا جم ر) + ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 - ط^2 ص^2 = ۰$$

اس مساوات درجہ دوم سے دو قیمتین تؔ کے دریافت ہو سکتی ہین اور یہہ طول دو خطون کی ہونگی جو نقطہ (لاؔ وؔ رؔ) سے بیضوی تک سمت معلوم مین کہنچے جا یئن

(۱۸۸) بیضوی مین ایک نظم اوتار متوازیہ کا معلوم ہی اوسکا قطر دریافت کرو دفعہ ۱۴۸ کی حد کو دیکہو

فرض کرو کہ رؔ زاویہ میلان وتردان کا محور بیضوی کے ساتھہ ہو اور لاؔ وؔ رؔ محدد ین نقطہ وسط ایک ایسی وتر کے جو تردون مین سے ہون تو مساوات جسسے طول خطوط کے جو (لاؔ وؔ رؔ) سی خط منحنی تک کہنچے جاتے ہین

بموجب دفعہ ۱۸۷ اکے یہہ ہین کہ

بؔ (طؔ جبؔ ر + صؔ جمؔ ر) + ۲ تؔ (طؔ رؔ جب ر + صؔ لاؔ جم ر)
+ طؔ رؔ + صؔ لاؔ − طؔ صؔ = ۰ (۱)

چونکہ (لاؔ وؔ رؔ) محدد نقطہ وسط وتر کے ہین تو قیمتین تؔ کی جو اس مساوات درجہ دوم سی دریافت ہونگیں متحد المقدار اور مختلف العلامت ہونگیں اسسے معلوم ہوا کہ امثال تؔ کی فنا ہونی چاہئی پس

طؔ رؔ جب ر + صؔ لاؔ جم ر = ۰ . یا رؔ = − (صؔ/طؔ) مم ر لاؔ (۲)

جب لاؔ اور رؔ کو مقدار متغیر خیال کرین تو یہہ مساوات خط مستقیم کی ہی جو مبدء مین گذرتا ہی یعنی جو مرکز بیضوی مین گذرتا ہی اسسے معلوم ہوا کہ قطر مرکز مین گذرتا ہی

اور نیز جو خط مستقیم مرکز مین گذرتا ہی وہ قطر ہوتا ہی یعنی تنصیف نظم معلوم اوتار متوازیہ کی کرتا ہے اسواسطے کہ رؔ کی مناسب قیمت کے مقرر کرنے سے مساوات (۲) ہر خط کو تعبیر کر سکتی ہے جو مرکز مین گذرتا ہی اگر رؔ زاویہ میلان محور لاؔ کا قطر کے ساتھہ ہو جو تمام وترون کو جو زاویہ ر پر مایل ہین تنصیف کرتا ہی تو ہم کو مساوات (۲) سے یہہ حاصل ہوتا ہی

مس رؔ = − (صؔ/طؔ) مم ر

∴ مس ر مس رؔ = − (صؔ/طؔ) (۳)

(۱۸۹) اگر ایک قطر تنصیف اون سب وترون کی کرتا ہی جو متوازی دوسرے قطر کی ہون تو دوسرا قطر اون سب وترون کی تنصیف کریگا جو پہلے قطر کے متوازی ہون

فرض کرو کہ ر اور رؔ بیضوی کے محور اعظم کے ساتھہ میلان دونو قطرون کے ہین چونکہ اول قطر تنصیف اون تمام وترون کی کرتا ہی جو متوازی دوسرے قطر کے ہون تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

مس ر × مس ر۱ = − ص٘ / ط٘

اور صرف یہی شرط ہی جسمی دوسرا قطر پہلے قطر کے متوازی سب وترونکو تنصیف کرتا ہی

(۱۹۰) جن وترون کے قطر تنصیف کرتا ہی اونکا متوازی وہ مماس ہوتا ہے جو قطر کے ایک طرف سے نکالا جاوے

فرض کرو کہ ح اور ق محددین قطر کے کسی ایک طرف کے ہین اور سب تر جنکی قطر تنصیف کرتا ہی محور کے ساتھہ زاویہ ر پر مائل ہین تو قیمتین لا = ح اور ی = ق اس مساوات کی شرائط کو پورا کریگی

ط٘ ی جب ر + ص٘ لا جم ر = ۰

∴ مس ر = − ص٘ ح / ط٘ ق

لیکن بموجب دفعہ ۱۷۰ کی مساوات مماس (ح اور ق) کی یہہ ہے کہ

ی − ق = − ص٘ ح / ط٘ ق (لا − ح)

اسے معلوم ہوا کہ مماس متوازی وترون کا ہی جنکی تنصیف ہوئی ہے

(۱۹۱) حد جب دو قطر ایسی ہون کہ ہر ایک اونمین کا سب وترون کی تنصیف کرتا ہو جو دوسرے قطر کے متوازی ہون تو اونکو اقطار مزدوج کہتے ہین

دفعہ ۱۹۰ اسے ظاہر ہی کہ ہر ایک اقطار مزدوج مین سے متوازی اوس مماس کا ہی جو دوسرے کے کسی ایک طرف سی نکالا جاوے

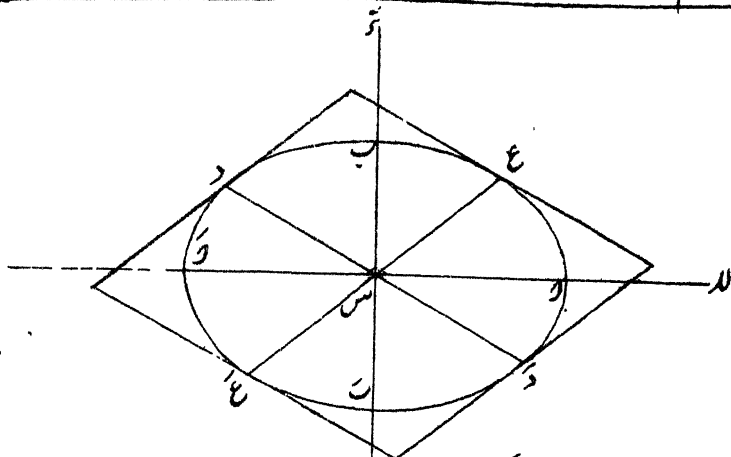
(۱۹۲) قطر کے ایک طرف کی محددین معلوم ہین تو محددین قطر مزدوج کے دوسری طرف کی دریافت کرو

فرض کرو کہ اس ا٘ اور ب س ب٘ ایک بیضوی کی محور ہین اور ع س ع٘ اور د س د٘ ایک زوج اقطار مزدوج کا ہے

فرض کرو کہ لا٘ و ی٘ نقطہ ع٘ کے محددین معلوم ہین تو مساوات س ع٘ کی یہہ ہے

ی = ی٘ / لا٘ لا (۱)

چونکہ قطر مزدوج د د٘ کا متوازی مماس نقطہ ع کا ہی تو مساوات د د٘ کی یہہ ہوگی کہ

ی = − ص٘ لا٘ / ط٘ ی٘ لا (۲)

اب ہم (۲) کو مساوات بیضوی کے ساتھ مخلوط کرتے ہین اور د اور دَ کے محددین دریافت کرتے ہین

مساوات (۲) سے مساوات

$ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ مین رکھو

تو $ط^2 \frac{ص^4}{ط^4} \frac{لا'^2}{ی'^2} لا^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$

$\therefore (ص^2 لا'^2 + ط^2 ی'^2) لا^2 = ط^2 ی'^2$

$\therefore لا^2 = \frac{ط^2 ی'^2}{\frac{ط^2 ص^2}{ص^2}} = \frac{ط^2 ی'^2}{ص^2}$

$\therefore لا = \pm \frac{ط ی'}{ص}$

$\therefore$ مساوات (۲) سے $ی = \mp \frac{ص لا'}{ط}$

شکل مین د کا محدد منفی ہے اور دَ کا مثبت اس سبب سے اوپر کی علامت دَ کی واسطے اور نیچے کی علامت د کی واسطے لینی چاہئیے بیضوی کی خواص متعلق اقطار مزدوج سی بکثرت ہین اور بڑے مطلب کے ہین ہم اونمین سے چند تحریر کرتے ہین

(سوال ۱۹۳) دو مزدوج نصف قطرون کے مربعون کا مجموعہ ایک مقدار مستقل ہے یعنی کبھی اوسمین تغیر واقع نہین ہوتی

فرض کرو کہ لا و ی محددین نقطہ ع کے ہین تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

$س ع^2 + س د^2 = لا^2 + ی^2 + \frac{ط^2 ی^2}{ص^2} + \frac{ص^2 لا^2}{ط^2}$

$= \frac{ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2}{ص^2} + \frac{ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2}{ط^2}$

$= ط^2 + ص^2$

پس اسسے ثابت ہوا کہ دو مزدوج نصف قطروں کے مربعوں کا مجموعہ برابر نصف محوروں کے مربعوں کے مجموعہ کے ہوا اور سوا اسکے

$$س د^2 = ط^2 + ص^2 - لا^2 - ی^2 = ط^2 + ص^2 - لا^2 - \frac{ص^2}{ط^2}(ط^2 - لا^2)$$

$$= ط^2 - (1 - \frac{ص^2}{ط^2}) لا^2 = ط^2 - ی لا^2 = ص ع . ع ع$$ بموجب دفعہ ۱۶۶ کے

(۱۹۴) اقطار مزدوج کے انجاموں پر جو متوازی الاضلاع بیضوی کو مس کرتی ہی اوسکا رقبہ مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ س ع اور س د اقطار مزدوج ہوں (شکل دفعہ ۱۹۲ کی دیکھو) —

رقبہ متوازی الاضلاع کا جو بیضوی کو نقاط ع و د و ع و د پر مس کرتی ہی یہ ہے کہ ۴ س ع . س د جب ع س د

یا ۴ ع . س د اسمین ع سے وہ عمود مراد ہے جو س سے اوس مماس پر نکالا جاے جو نقطہ ع سے نکلتا ہے،

فرض کرو کہ لا و ی محددین نقطہ ع کی ہوں تو مساوات مماس کی جو نقطہ ع پر مس کرتا ہی یہہ ہوگی

$$ی = -\frac{ص^2 لا}{ط^2 ی} لا + \frac{ص^2}{ی}$$

پس معلوم ہوا کہ بموجب دفعہ (۴۷) کے ع = $\frac{\frac{ص^2}{ی}}{\sqrt{(1 + \frac{ص^4 لا^2}{ط^4 ی^2})}} = \frac{ط^2 ص^2}{\sqrt{(ط^4 ی^2 + ص^4 لا^2)}}$

اور س د = $\sqrt{(\frac{ط^2 ی^2}{ص^2} + \frac{ص^2 لا^2}{ط^2})} = \frac{\sqrt{ط^4 ی^2 + ص^4 لا^2}}{ط ص}$

$$۴ ع . س د = ۴ ط ص$$

پس رقبہ کسی متوازی الاضلاع کا جو بیضوی کی اقطار مزدوج کے انجاموں پر مس کرتی ہی برابر ہے اوس قائم الزاویہ کے رقبہ کے جو بیضوی کے محوروں کے انجاموں پر مس کرتی ہے

(۱۹۵) فرض کرو کہ ط و ص طول دو اقطار مزدوج کا تعبیر کرتے ہیں اور ھ اونکے درمیان زاویہ ہے تو بموجب دفعہ گذشتہ

$$ط ص جب ھ = ط ص$$

$$جب ھ = \frac{ط ص}{ط ص} = \frac{۴ ط^2 ص^2}{(ط^2 + ص^2)^2 - (ط^2 - ص^2)^2} = \frac{۴ ط^2 ص^2}{(ط^2 + ص^2)^2 - (ط^2 - ص^2)^2}$$

اسسے معلوم ہوا کہ جب ھ کے نہایت کم قیمت جب ہوگی کہ ط = ص پس

$$جب ھ = \frac{۲ ط ص}{ط^2 + ص^2}$$

(۱۹۶) دفعہ ۱۹۴ سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{ط}^2+\text{ص}^2}{2} = \frac{\text{ط}^2\,\text{ص}^2}{\text{ط}^2\,\text{جب}^2\,\text{ھ} + \text{ص}^2\,\text{جم}^2\,\text{ھ}}$$

$$\therefore (\text{ط}^2+\text{ص}^2)\left[(\text{ط}^2-\text{ص}^2)\,\text{جب}^2\,\text{ھ}+\text{ص}^2\right] = 2\,\text{ط}^2\,\text{ص}^2$$

$$\therefore \text{جب}^2\,\text{ھ} = \frac{\text{ط}^2\,\text{ص}^2-\text{ص}^4}{(\text{ط}^2+\text{ص}^2)(\text{ط}^2-\text{ص}^2)} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2+\text{ص}^2}$$

اسسے ثابت ہوتا ہے کہ اقطار مزدوج متساوی متوازی خطوط ب آ اور ب آ کی ہوتی ہین

(۲۰۰) مساوات مماس بیضوی کی ایک ہی صورت کی ہوگی خواہ محور اقطار مزدوج سی بنکر قائم الزاویہ ہون خواہ غیر قائم الزاویہ اسواسطے مساوات $\text{ط}^2\,\text{ی}^2 + \text{ص}^2\,\text{لا}^2 = \text{ط}^2\,\text{ص}^2$ جو بیضوی کو لحاظ اسکے محرف محورون کے تعبیر کرتی ہے دفعہ ۷۰ اکی تحقیقات بغیر کسی تغیر تبدل کے کام مین آسکتی ہے

(۲۰۱) کسی وتر بیضوی کے اطراف سے مماس نکالے جائین تو وہ اوس قطر پر ملتے ہین جو وتر کی تنصیف کرتا ہی

قطر جو وتر کی تنصیف کرتا ہی اوسکو محور لا اور قطر جو متوازی وتر کے ہی اوسکو محور ی سے تعبیر کرو تو ان محورون کے موافق مساوات بیضوی کی یہہ ہوگی کہ

$$\text{ط}^2\,\text{ی}^2 + \text{ص}^2\,\text{لا}^2 = \text{ط}^2\,\text{ص}^2$$

فرض کرو کہ لا ی ایک طرف وتر کے محددین ہین تو مساوات مماس کی اس نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

$$\text{ط}^2\,\text{ی}\,\text{ی}' + \text{ص}^2\,\text{لا}\,\text{لا}' = \text{ط}^2\,\text{ص}^2 \quad \ldots \quad (1)$$

اور محددین وتر کے دوسری طرف کے لا اور $-$ ی ہین اور مساوات مماس کی یہہ ہے کہ

$$-\text{ط}^2\,\text{ی}\,\text{ی}' + \text{ص}^2\,\text{لا}\,\text{لا}' = \text{ط}^2\,\text{ص}^2 \quad (2)$$

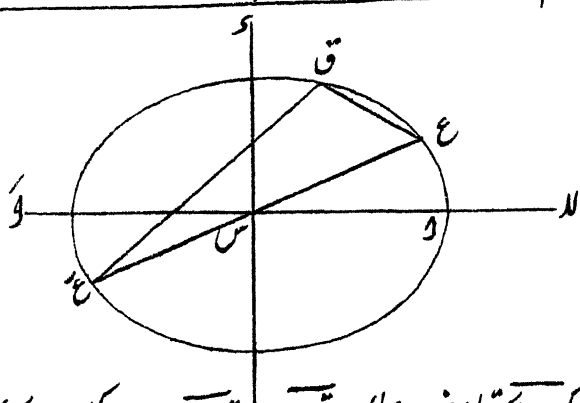
تو خطوط جو مساوات (۱) اور (۲) سے تعبیر ہوتے ہین جس نقطہ پر ملتے ہین اوسکی محددین یہہ ہین کہ

$$\text{ی}' = 0 \quad \text{اور} \quad \text{لا}' = \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}}$$

اسسے دعوی ثابت ہے

## اوتار مکمل

(۲۰۲) حد بیضوی کے کسی نقطہ سے کسی قطر کے اطراف مین جو خطوط وصل ہون اونکو اوتار تکمیل کہتے ہین اور جب قطر محور اعظم ہو تو اونکو تکمیل اعظم کہتے ہین

(۲۰۳) اگر ایک وتر اور قطر بیضوی کے باہم متوازی ہون تو وتر مکمل متوازی قطر مزدوج کا ہوگا

فرض کرو کہ ع عَ قطر بیضوی کا اور ق ع اور ق عَ دو اوتار مکمل اور لا، ی محددین نقطہ ع کے مین اور اسیواسطے – لاَ اور – یَ محددین نقطہ عَ کے ہونگے

تو مساوات ع ق کی بموجب دفعہ ۲۰۳ کے

$$\text{ی} - \text{یَ} = \text{م}\,(\text{لا} - \text{لاَ}) \qquad (۱)$$

اور مساوات عَ ق کی

$$\text{ی} + \text{یَ} = \text{مَ}\,(\text{لا} + \text{لاَ}) \qquad (۲)$$

محددین نقطہ ق کے مساوات (۱) اور (۲) کی شرائط کو پورا کرتی ہین پس اگر لا اور ی اون محددین کو تعبیر کرین تو ہم کو (۱) اور (۲) کے ضرب دینے سے یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{ی}^2 - \text{یَ}^2 = \text{م}\,\text{مَ}\,(\text{لا}^2 - \text{لاَ}^2) \qquad (۳)$$

لیکن اس سبب سے کہ (لا، ی) اور (لاَ، یَ) نقاط بیضوی پر ہین

$$\text{ط}^2\,\text{ی}^2 + \text{ص}^2\,\text{لا}^2 = \text{ط}^2\,\text{ص}^2$$

$$\text{ط}^2\,\text{یَ}^2 + \text{ص}^2\,\text{لاَ}^2 = \text{ط}^2\,\text{ص}^2$$

$$\therefore\ \text{ط}^2\,(\text{ی}^2 - \text{یَ}^2) + \text{ص}^2\,(\text{لا}^2 - \text{لاَ}^2) = 0$$

$$\therefore\ \text{ی}^2 - \text{یَ}^2 = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}\,(\text{لا}^2 - \text{لاَ}^2) \qquad (۴)$$

(۳) اور (۴) سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{م}\,\text{مَ} = -\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} \qquad (۵)$$

لیکن ہم دفعہ ۱۸۸ مین ثابت کر آئے ہین کہ اگر (۵) کی شرائط پوری ہون تو ان دو خطون سے جنکی مساواتین یہہ ہین کہ ی = م لا اور ی = مَ لا اقطار مزدوج سے تعبیر ہونگی پس اس سے دعوی ہمارا ثابت ہے

## مساوات قطبیہ

(۲۰۴) مساوات قطبیہ بیضوی کی دریافت کرو ماسکہ قطب ہے

فرض کرو کہ ص ع = ق اور اَ ص ع = ر (شکل دفعہ ۱۵۸ کی دیکھو)

تو ص ع = ی . ع ن بموجب حد کے

یعنی ص ع = ی (ط ص + ص م)

یا ق = ط (۱ − یٓ) + ی ق جم (ک − ر) دفعہ ۱۶۱ کے

∴ ق (۱ + ی جم ر) = ط (۱ − یٓ)

اور ق $= \frac{ط (۱ - یٓ)}{۱ + ی جم ر}$

اب اگر زاویہ اص ع کو ر سے تعبیر کریں تو ہمکو وہی حاصل ہوگا جو پہلے حاصل ہوا تھا کہ

ص ع = ی (ط ص + ص م)

پس ق = ط (۱ − یٓ) + ی ق جم ر

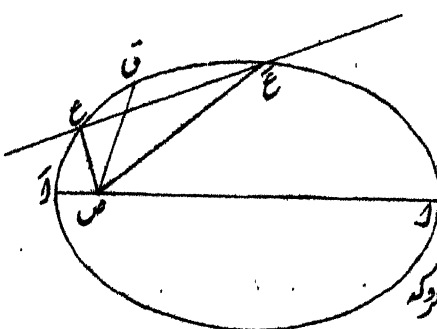
اور ق $= \frac{ط (۱ - یٓ)}{۱ - ی جم ر}$

(۲۰۵) دفعہ گذشتہ کو اس کام میں لاتے ہیں کہ اوسے اول مساوات وتر کی دریافت کرینگے اور پھر اوسے قطبی مساوات مماس کی دریافت کرینگے

فرض کرو کہ ع اور عَ دو نقطے بیضوی پر ہیں اور

اص ع = ھ − ب اور اَص عَ = ھ + ب

پس ع ص عَ = ۲ ب اور فرض کرو کہ ل نصف عرض مستقیم بیضوی کا ہی پس

ل = ط (۱ − یٓ) اب یہہ مطلوب ہے کہ مساوات قطبی خط ع عَ کی دریافت کرین



دفعہ ۳۹ کو دیکھہ کر یہہ مساوات فرض کرو کہ

اق جم ر + ب ق جم ر + س = ۰ (۱)

چونکہ خط نقطہ عَ پر گذرتا ہی اسلئے مساوات (۱) کی نقطہ ع سے شرائط پوری ہونی چاہئیں اب

اَص ع = ھ − ب اور اسیواسطے

ص ع = ل / (۱ + ی جم (ھہ − ب)) پس مساوات (۱) سے

ل [ا جم (ھہ − ف) + ب جب (ھہ − ف)] + س [۱ + ی جم (ہ + ب)] = ۰ (۲)

اور علیٰ ہذا القیاس خط نقطہ عَ پر بہی گذرتا ہی

ل [ا جم (ھہ + ب) + ب جب (ھہ + ف)] + س [۱ + ی جم (ہ + ف)] = ۰ (۳)

(۲) اور (۳) کی تفریق کرنے سے

ل (ا جب ھہ حب ف − ب جم ھہ حب ب) + س ی جب ھہ حب ف = ۰

∴ ل (ا جب ھہ − ب جم ھہ) + س ی جب ھہ = ۰ (۴)

اور مساوات (۲) اور (۳) کے جمع کرنے سے

ل (ا جم ھہ جم ب + ب جم ھہ جم ا ب) + س (۱ + ی جم ھہ جم ب) = ۰

∴ ل (ا جم ھہ + ب جب ھہ) + س (قط ب + ی جم ھہ) = ۰ (۵)

(۴) اور (۵) سے ہمکو یہہ معلوم ہوتا ہی کہ

ل ا + س (قط ب جم ھہ + ی) = ۰

ل ب + س قط ب جب ھہ = ۰

ا اور ب کی قیمتین (۱) مین رکہو اور س پر تقسیم کرو تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

و [(قط ب جم ھہ + ی) جم ر + قط ب جب ھہ جب ر] − ل = ۰

∴ و = ل / (ی جم ر + قط ب جم (ھہ − ر))

اگر ص ق زاویہ ع ص عَ کی تنصیف کرے تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا

ع ص ق = ب اور اص و = ھہ

اب فرض کرو کہ ب غیر متناہی کم ہو تو وتر ع عَ مماس نقطہ ق پر ہو جائیگا اور ہم اوسکی مساوات قطبیہ ب = ۰ فرض کرکے نتیجہ بالا سے حاصل کرسکتے ہین

نق = ل / (ی جم ر + جم (ھہ − ر))

اور ی = ۱ کے فرض کرنے سی تحقیقات اس دفعہ کی قرب البیضوی سے متعلق ہو جائیگی

(۲۰۶) مساوات قطبیہ بیضوی کی بلحاظ مرکز کے فائدہ مند ہوتی ہے اور وہ مساوات ط^۲ ئ^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲

سے مستنبط ہو سکتی ہے اسطرح کہ ق جم ر اور ق جب ر بجای لا اور ی کے رکھین تو معلوم یہہ حاصل ہوگا

ق۲ (ط۲ جب۲ ر + ص۲ جم۲ ر) = ط۲ ص۲

اب بیضوی کے باب مختلف دعوی ثابت کرتے ہین

(۲۰۷) بیضوی کے وتر ماسکہ کے اطراف سے مماس نکالے جائین (۱) تو وہ مماس خط منتظم پر تقاطع کرینگے

(۲) مماسون کے تقاطع سے خط ماسکہ مین ملایا گیا عمود وتر ماسکہ پر ہوگا

اول اگر دو مماس بیضوی کے نقطہ (ح اور ق) پر ملتے ہین تو مساوات وتر تماس کی بموجب دفعہ ۱۸۳ کے یہہ ہوگی کہ

ط۲ ق ی + ص۲ ح لا = ط۲ ص۲

فرض کرو کہ وتر ماسکہ پر گذرتا ہی جسکے محددین لا = − طی اور ی = ۰ تو

− ص۲ ح طی = ط۲ ص۲

یعنی نقطہ تقاطع مماسون کا اوس خط منتظم پر ہے جو بفاصلہ ح = − ط/ی افق اس ماسکہ کے مقرر کیا جای

دوم مساوات خط کی جو ماسکہ اور نقطہ (ح و ق) مین گذرتا ہی یہہ ہے

$$ی = \frac{ق}{ح + طی} (لا + طی)$$

اگر ح = − ط/ی تو اس مساوات کو صورت یہہ ہوگی کہ

$$ی = -\frac{ق ی}{ط (۱ - ی۲)} (لا + طی)$$

$$= \frac{ق ط۲}{ح ص۲} (لا + طی)$$

اسواسطے خط عمود وتر ماسکہ پر ہے جسکی مساوات یہہ ہے کہ

$$ی = -\frac{ص۲ ح لا}{ط۲ ق} + \frac{ص۲ ح}{ط ق}$$

(۲۰۸) بیضوی کے اندر یا باہر ایک نقطہ ہو اور اوسے دو خط متوازی دو خطوط مستقیم معلوم سے بیضوی کے ملتے ہوی نکالے جائین تو اونکے حصون کی سطحون مین نسبت مستقل ہوگی یعنی کچھہ تغیر اوسمین نہین ہوگا

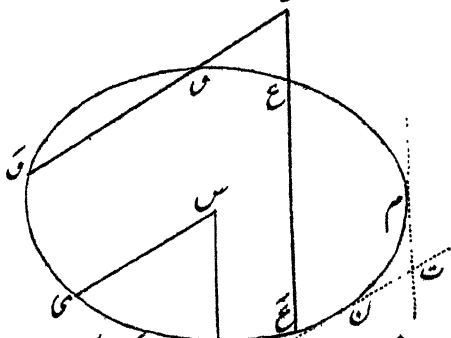
فرض کرو کہ (لا و ی) نقطہ معلوم ہی اور خطوط مستقیم معلوم محور اعظم کے ساتھہ ھہ اور ب زاویون پر میل کرتے ہین بموجب دفعہ ۱۸۷ کے اگر ایک خط (لا و ی) سے کھینچا جاے اور خط منحنی سے ملے اور زاویہ ھہ پر محور اعظم کے ساتھہ مائل ہو تو اس مساوات سی اوسکے حصون کے طول معلوم ہوتے ہین

ق۲ (ط۲ جب۲ ھہ + ص۲ جم۲ ھہ) + ۲ ق (ط۲ ی جب ھہ + ص۲ لا جم ھہ) + ط۲ ی۲ + ص۲ لا۲ − ط۲ ص۲ =

اسیواسطے سطح حصون کی $= \dfrac{\text{ط}^2\text{د}^2 + \text{ص}^2\text{لا}^2 - \text{ط}^2\text{ص}^2}{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ھ} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ھ}}$

اور علیٰ ہذا القیاس اوس خط کے حصونکی سطح جو (لاَ و دَ) سے زاویہ ب بناتا ہو کہیجاوے

$$= \frac{\text{ط}^2\text{دَ}^2 + \text{ص}^2\text{لاَ}^2 - \text{ط}^2\text{ص}^2}{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ھ} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ھ}}$$

اور یہہ نسبت مستقل ہی خواہ لاَ اور دَ کچھہ ہی ہون

فرض کرو کہ ط وہ نقطہ ہی جس سی خطوط ط ع عَ اور ط ق قَ کہچے گئے ہین اور محور اعظم پر زاویے ھ اور ب بناتے ہین تو

$$\frac{\text{ط ع} \cdot \text{ط عَ}}{\text{ط ق} \cdot \text{ط قَ}} = \frac{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ب} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ب}}{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ھ} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ھ}}$$

نصف قطر س د اور س ی متوازی ع عَ اور ق قَ کے نکالو تو بموجب دفعہ ۲۰۶ کے

$$\frac{\text{س د}^2}{\text{س ی}^2} = \frac{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ب} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ب}}{\text{ط}^2\text{جب}^2\text{ھ} + \text{ص}^2\text{جم}^2\text{ھ}}$$

$$\therefore \frac{\text{ط ع} \cdot \text{ط عَ}}{\text{ط ق} \cdot \text{ط قَ}} = \frac{\text{س د}^2}{\text{س ی}^2}$$

فرض کرو کہ ت م اور ت ن مماس متوازی ع عَ اور ق قَ کے ہون تو اگر ط منطبق ت پر ہو تو سطح ط ق اور ط قَ کی ت ن² ہوجائیگی

$$\therefore \frac{\text{ت م}^2}{\text{ت ن}^2} = \frac{\text{س د}^2}{\text{س ی}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ت م}}{\text{ت ن}} = \frac{\text{س د}}{\text{س ی}}$$

## مثالین

(۱) س ع اور س د نصف قطر مزدوج ہین اور نقطہ ع کے محدد ین (لا و ی) معلوم ہین مساوات خط ع د کی دریافت کرو

(۲) بیضوی کے کسی نقطہ سے خطوط کسی قطر کے اطراف ہین ملائے گئے قطر مزدوج س د سے نقاط م اور ن پر ملین تو ثابت کرو کہ س م . س ن = س د$^2$

(۳) س ع اور س د نصف قطر مزدوج ہین اور س ع اور س د دو اور قطر مزدوج ہین تو ثابت کرو کہ رقبہ مثلث ع س ع کا برابر رقبہ مثلث د س د کے ہے

(۴) مزدوج نصف قطرون کے اطراف ع اور د سے عمود المماس کہیے گئے نقطہ ک پر ملتے ہین تو مساوات ک س کی دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ک س عمود ع د پر ہے

(۵) مرکز بیضوی سے عمود مماس پر نکالا گیا ہی تو سطح اس عمود اور مطابق اسکے اوس حصہ عمود المماس کی جو درمیان محورون کے واقع ہو برابر ہوتا ہی نصف محورون کے مربعون کے تفاوت کی

(۶) مرکز بیضوی سے عمود جو اوسکے مماس پر نکالا جاے تو نقطہ تقاطع کا مقام التقاط وہ خط منحنی ہوگا جسکے مساوات یہہ ہے $ق^2 = ط^2 جم^2 ر + ص^2 جب^2 ر$ مرکز مبدء ہی

(۷) بیضوی کی راس ا سے خط ا ر ق کا ع کے نقطہ وسط ق سے گذرتا ہی اور ص ع سی نقطہ ر پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ مقام التقاط ر کا بیضوی ہی اور ق کا مقام التقاط بھی بیضوی ہی

(۸) مبدء راس بیضوی ہی اور محور اعظم مقام ابتدائی ہی مساوات قطبیہ بیضوی کی دریافت کرو

(۹) اگر کوئی وتر ا ق محور اعظم ممدودہ سے نقطہ ر پر ملے اور س ع نصف قطر متوازی ا ق کا ہے تو $ا ق . ا ر = ۲ س ع^2$

(۱۰) بیضوی کے محور اعظم ا ا کو قطر قرار دیکر ایک دائرہ بنایا ہی اور دائرہ مین ایک نقطہ ع ہے اور ا ع اور ا ع ملائی گئی بیضوی کو ق اور ق پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ا ع}{ا ق} + \frac{ا ع}{ا ق} = \frac{ط^2 + ص^2}{ص^2}$$

(۱۱) اگر بیضوی کے دو نصف قطر مزدوج قطر مقرر ہوکر دائرے اون پر کہیچے جائین تو اونکی تقاطع کا مقام التقاط وہ خط منحنی ہوگا جسکی مساوات یہہ ہے

$$۲ (لا^2 + ی^2)^2 = ط^2 لا^2 + ص^2 ی^2$$

(۱۲) س ع اور س د نصف قطر مزدوج ہین اور س ق عمود س د پر ہے مقام التقاط ق کا دریافت کرو

(۱۳) وہ نقطے دریافت کرو جہان بضیوی ط (ا- یٰ) = ق + قِ یٰ جم ر خط
ط (ا- یٰ) = ب جب ر + ب (ا + ی) جم ر کو قطع کرتی ہے

(۱۴) عرض مستقیم کے انجاموں سے جو چار مماس نکالے جائین اونکی مساواتین قطبیہ دریافت کرو اور محور خورد کے انجاموں سے جو مماس نکالے جائین اونکی مساواتین بہی دریافت کرو اور ماسکہ قطر سے

(۱۵) ع اور ق دو نقطے ایسی لئے گئے ہین کہ مجموعہ زاویون اص ع اور اص ق کا مستقل ہے تو جو مماس ان نقطون سے نکالے جائین اونکے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۶) اگر ع ص ع َ وتر ماسکہ بضیوی ہو اور خط ص ع سے ایک خط ص ق متوسط النسبت ص ع اور ص ع َ کا جدا کیا جاوے تو مقام النقاط ق کا بضیوی ہوگا جسکی نسبت خارج المرکز وہی ہوگی جو بضیوی کی ہے

(۱۷) دو بضیوی مشترک الماسکہ ہین اور اونکی محور اعظم آپس مین مساوی ہین اور متحد السمت ہین تو اونکی نقاط تقاطع کے محددین قطبیہ دریافت کرو

(۱۸) ایک بضیوی کے دو مماس نقطہ بیرونی سے کہیچے گئے ہین ایک مماس کے طول کی نسبت دوسرے مماس کے طول سے بتاؤ کن حدود نہائی کے درمیان واقع ہے

(۱۹) ت ع اور ت ق مماس بضیوی کے ہین اور ان مماسون کے متوازی مرکز سے نصف قطر س ع َ اور س ق َ کہیچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ ع َ ق َ اور ع ق متوازی ہین

(۲۰) بضیوی اور دائرے آپسمین چار نقطون پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ اوتار مشترک مساوی زاوئے محور اعظم پر بناتے ہین

(۲۱) جب زاویہ درمیانی نصف قطر دائر جو ماسکہ سے کہیچا جاوے اور مماس کا نہایت کم ہو تو نصف قطر دائر = ط

(۲۲) جو زاویہ درمیانی نصف قطر دائر جو مرکز سے کہیچا جاوے اور مماس نہایت کم ہو تو نصف قطر دائر
= $\left(\frac{ط^2 + ص^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

(۲۳) ایک بضیوی کے قطر ع ع َ کی اطراف سے ع ت اور ع َ ت َ مماس نکالی گئی ہین اور کوئی اور قطر ع ت سے نقطہ ت پر ملتا ہی اور اوسکا مزدوج ع ت َ سے نقطہ ت َ پر ملتا ہی اور ایک اور مماس بہی ع ت سے ت َ َ پر ملتا ہے تو ثابت کرو کہ

ع ت : ع ت َ َ :: ع َ ت َ : ع َ ت َ

(۲۴) بضیوی کے اقطار مزدوج کی انجاموں ع اور د سے خطوط متوازی کسی مماس ہے کہینچے گئے ہین اور مرکز س سی کوئی خط ان خطوں کو اور مماس کو کاٹتا ہوا نقاط عَ و دَ و تَ کہینچا گیا ہے تو ثابت کرو

س عَ۲ + س دَ۲ = س تَ۲

(۲۵) بضیوی کے مختلف نقاط سی مماس نکالے گئے ہین اور اونکی طول برابر ہین اور س ن گنے نصف قطر مزدوج کے جو ہر نقطہ سے کہینچا جای تو اون مماسون کے اطراف سی مقام انتقاط جو بنیگا وہ متحد المرکز بضوی ہوگی اور نصف محور اوسکے یہہ ہونگی

ط √(ن۲+۱) اور ص √(ن۲+۱)

(۲۶) دفعہ ۱۷ امین جو مساوات مماس کی لکہی ہے اوسے اقطار مزدوج کی اطراف سی جو مماس نکالی جاتی ہین اونکی تقاطع کا مقام انتقاط دریافت کرو

(۲۷) بضیوی مین اگر ایک نقطہ (لَ دَ وَ) سی وتر متوازی ایک خط قائم کا نکالا جاے تو ثابت کرو کہ طول اس وتر کا ایسا ہوتا ہی جیسا کہ (ھ ـ س) / ح م س اسمین س زاویہ میلان مماس (لَ دَ وَ) کا محور کے ساتہہ ہے اور ھ زاویہ میلان خط قائم اور محور کا ہی

(۲۸) اگر بضیوی کے نقطہ ع سی دو وتر ع ق اور ع ر متوازی دو قائم خطون کے کہینچے جائین اور نقطہ ع سی جو مماس نکالا جاے اوسکی ساتہہ وہ زاوے ھ اور ب بنائین تو ثابت کرو کہ ع ق قم ھ اور ع ر قم ب مستقل ہین

(۲۹) ایک بضیوی معلوم المقدار ہے اوسکے عرض مستقیم کے اطراف پر ایک قریب البضیوی بضیوی کو مس کرتی ہے تو عرض مستقیم قریب البضیوی کا دریافت کرو

(۳۰) بضیوی کے اقطار متقاطع علی القوائم کے اطراف مین جو خط ملایا جاے اوسپر جو عمود مرکز سے نکالا جاے وہ مستقل ہوتا ہی یعنی ہمیشہ ایک ہی مقدار اوسکی ہوتی ہے

(۳۱) محور بضیوی کے انجام سے اوتار کہینچے گئے ہین تو اونکی نقاط وسط کا مقام انتقاط دریافت کرو

(۳۲) کسی نقطہ معین سے اوتار بضیوی کہینچے گئے ہین تو اونکے نقاط وسط کا مقام انتقاط دریافت کرو

(۳۳) ایک بیضوی کے دو وتر ماسکہ متقاطع علی القوائم کھچے گئے ہین تو اونکا مقام اوس حالت مین دریافت کرو کہ اونکی سطح کم از کم یا زیادہ از زیادہ ہو

(۳۴) بیضوی مین اگر ع ع اور ق ق وتر ماسکہ متقاطع علی القوائم ہون تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1-ی^2}{ص ع \cdot ص ع'} + \frac{1-ی^2}{ص ق \cdot ص ق'} = \frac{1}{ا س^2} + \frac{1}{ب س^2}$$

(۳۵) ع ص ع اور ق ص ق او تار ماسکہ ہین اور ت وہ نقطہ ہی جہان ع ق اور ع ق ملیں تو ثابت کرو کہ ت ص او تار ماسکہ کے ساتھہ یکسان میل رکھتا ہی اور ت ماسکہ ص کے خط منتظم پر ہے

(۳۶) اگر نقطہ ع کے ر اور ت قطبی محددین ہون تو ثابت کرو کہ

$$مس ہ ع ط = \frac{ص}{\sqrt{(۲ ط ب - ب^2 - ص^2)}} \quad او = \frac{1 + ی جم ر}{ی جب ر}$$

(۳۷) بیضوی میں دو اقطار مزدوج کی اطراف ع اور د سے عمود قطر پر نکالی گئی ہین اور قطر سے کہ ر = لاس ھ تو ثابت کرو کہ عمود دونکے مربعون کا مجموعہ $ط^2 حب^2 ھ + ض^2 جم^2 ھ$ ہے

(۳۸) نقاط ع اور ق کے خارج المرکز زاوی س اور س' ہین تو ثابت کرو کہ قطرون کی اطراف سے جو مماس نکالے جائین اور اون سے متوازی الاضلاع پیدا ہو اوسکا رقبہ یہہ ہے $\frac{۴ ط ص}{حب (س - س')}$

اور یہہ بہی ثابت کرو کہ یہہ رقبہ جب نہایت کم ہوگا کہ ع اور ق اطراف قطر مزدوج کے ہون

(۳۹) ثابت کرو کہ بیضوی مین جن وترون کا طول ۲ س ہو اونکے نقاط وسط کا مقام النقاط یہہ ہوگا

$$س^2 \frac{ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2}{ط^2 ی^2 + ص^4 لا^2} + \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} - 1 = 0$$

(۴۰) نقطہ ط کے محددین (ح و ق) ہین اور اوسے وتر بیضوی کے ایک دوسرے کے ساتھہ قائم زاویے بناتے ہوئے کھچے گئے ہین اگر س ع اور س ق نصف قطر مرکز سے متوازی وترو کھچین اور ی اور ف وترون کے نقاط وسط ہون تو ثابت کرو کہ

$$\frac{ط ی^2}{س ع^2} + \frac{ط ف^2}{س ق^2} = \frac{ح^2}{ط^2} + \frac{ق^2}{ص^2}$$

(۴۱) نقطہ ع کے محددین معلوم ہین نقاط ع اور د سے جو مماس نکالے جائین اونکے نقاطع کے محددین دریافت کرو

(۴۲) ثابت کرو کہ مساوات

$$\left[ \frac{لا (ص لا - طی)}{ط^2 ص} + \frac{ی (طی + ص لا)}{ط ص^2} - ۱ \right]^2 = \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} - ۱$$

تعبیر اون مماسون کو کرتی ہی کہ ع اور د سے نکالے جائین لا اور ی نقطہ ع کے محددین مین (شکل دفعہ ۱۹۲ کی دیکہو)

(۴۳) اگر س ع اور س د بیضوی ا ع ب د اکے اقطار مزدوج ہون اور ب ع اور ب د ملائی جائین اور ا د اور ا ع بہی اور یہہ نقطہ ط پر ملین تو ثابت کرو کہ ب د ط ع متوازی الاضلاع ہے

(۴۴) ثابت کرو کہ رقبہ متوازی الاضلاع کا جسکا ذکر اوپر ہوا ہے = ط ی + ص لا - ط ص جسمین لا و ی محددین نقطہ ع کے ہین اور اس رقبہ کی بڑی سی بڑی قیمت دریافت کرو

(۴۵) اگر ایک خط بیضوی کی ماسکہ سی کہنچا جاے اور زاویہ ھ مماس کے ساتہہ بناہی تو ثابت کرو کہ اوسکے اور مماس کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط ایک دائرہ ہوگا جو بیضوی کو مس کریگا بشرطیکہ جم ھ بیضوی کے نسبت خارج المرکزی سے کم ہو اور بالکل باہر واقع ہوگا اگر جم ھ اوس نسبت سی بڑی ہو

(۴۶) بیضوی مین اقطار کے زوج مزدوج پر ص ق اور ہ ق عمود نکالے گئی ہین جو نقطہ ق پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ ق کا مقام النقاط متحد المرکز بیضوی ہے

(۴۷) دو بیضوی ہین جنکے ماسکہ منطبق ہین اور ایک کا مماس دوسرے کے مماس سے قائمون پر تقاطع کرتا ہی تو ثابت کرو کہ نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دائرہ ہی جسکا مرکز بیضوی کا مرکز ہی

(۴۸) جب محور منحرف ہون تو بتاؤ مساوات $لا^2 + ی^2 = س^2$ سے کیا تعبیر ہوتا ہی

(۴۹) جب اقطار کے زوج مزدوج محور ہون اور اونکے لحاظ سے بیضوی پر بحث کیجای تو ثابت کرو کہ مساواتین ی = م لا اور ی = مَ لا اقطار مزدوج کو تعبیر کرینگی بشرطیکہ $م مَ = - \frac{ص^2}{ط^2}$

(۵۰) بیضوی کے مساوات مین اقطار مزدوج محور مقرر کئی گئی ہین اور وہ آپسمین برابر ہین تو کسی نقطہ کے عمود مماس کی مساوات دریافت کرو

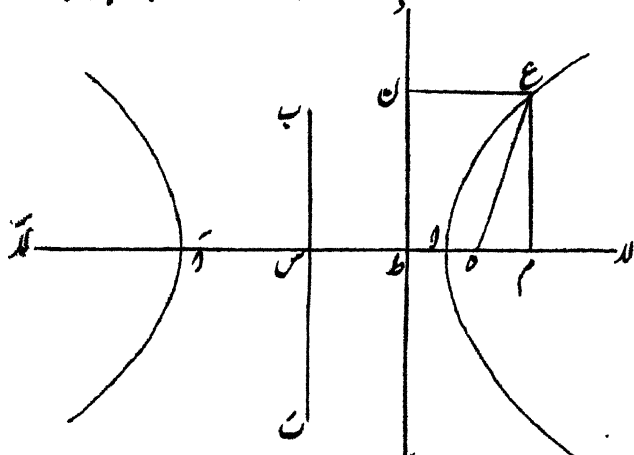
(۵۱) کسی نقطہ ع سے ع م اور ع ن اقطار مزدوج متساویہ پر عمود نکالین تو ثابت کرو کہ نقطہ ع کا

عمود المماس س م ن کی تنصیف کرتا ہے

# باب یازدہم

## بعید البیضوی

(۲۰۹) مساوات بعید البیضوی کی دریافت کرو

بعید البیضوی مقام انتقاط اوس نقطہ کا ہوتا ہے جو اس طرح حرکت کرتا ہی کہ نقطہ معین اور خط معین سے اوسکے ابعاد مین نسبت مستقل ہوتی ہے اور یہہ نسبت ایک سی بڑی ہوتی ہے

فرض کرو کہ ہ نقطہ معین اور ی ی ایک خط معین ہے ہ ط عمود ی ی پر نکالو اور ط کو مبدء مانو اور ہ ط کو سمت محور لا کی اور ط ی کو محور ی جانو

اور ع ایک نقطہ مقام انتقاط پر فرض کرو اور ہ ع ملاؤ اور ع م متوازی ط ی کا اور ع ن متوازی ط لا کا نکالو اور ط ہ = ع اور ی نسبت ہ ع اور ع ن کی مقرر کرو اور لا اور ی محددین نقطہ ع کے فرض کرو تو موجب حدود کے

ہ ع = ی . ع ن

∴ ہ ع^۲ = ی^۲ . ع ن^۲

∴ ع م^۲ + ہ م^۲ = ی^۲ . ع ن^۲

یعنی لا^۲ + ( لا − ع )^۲ = ی^۲ لا^۲

یہہ مساوات بعید البیضوی کی موافق مبدء اور محور مفروضہ کے ہے

(۲۱۰) دریافت کرو کہ محور لا سے کہان بعید البیضوی ملتے ہین
ی = ۰ لکھو تو مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہوگی کہ

$(لا - ع)^2 = ی^2 لا^2$

$\therefore لا - ع = \pm ی لا$

$\therefore لا = \frac{ع}{1 \mp ی}$

چونکہ ی بڑی ا سے ہے اسلئے ۱ - ی مقدار منفی ہوگی

فرض کرو کہ ط ا = $\frac{ع}{ی - 1}$ اور ط ا = $\frac{ع}{1 + ی}$ پہلا خط ط کی بائین طرف اندازہ کیا گیا ہی

اسے معلوم ہوا کہ آ اور آ بعید البیضوی کے نقطے ہین - آ اور آ راس بعید البیضوی اور ان راسون کے درمیان کا نقطہ وسط س مرکز بعید البیضوی کہلاتا ہی

(۲۱۱) ہم مساوات بعید البیضوی کو بہت سادہ بنا سکتے ہین اگر مبدء کو اسپر یا س پر بدل دین

**اول مبدء آ کو مقرر کرو**

چونکہ ط آ = $\frac{ع}{1 + ی}$ ہم لا = لا + $\frac{ع}{1 + ی}$ کے رکھتی ہین اور اس قیمت کو مساوات

$ی^2 + (لا - ع)^2 = ی^2 لا^2$ مین رکھتی ہین

تو $ی^2 + \left(لا + \frac{ع}{1+ی} - ع\right)^2 = ی^2 \left(لا + \frac{ع}{1+ی}\right)^2$

یعنی $ی^2 + \left(لا - \frac{ی ع}{1+ی}\right)^2 = ی^2 \left(لا + \frac{ع}{1+ی}\right)^2$

$\therefore ی^2 + لا^2 - \frac{2 لا ی ع}{1+ی} = ی^2 \left(لا^2 + \frac{2 ع لا}{1+ی}\right)$

$\therefore ی^2 = 2 ع ی لا + (ی^2 - 1) لا^2$

$= (ی^2 - 1) \left[\frac{2 ع ی لا}{ی^2 - 1} + لا^2\right]$

بعد ا آ = $\frac{ع}{ی - 1} + \frac{ع}{1 + ی} = \frac{2 ی ع}{ی^2 - 1}$

اسکو ۲ ط سے تعبیر کرو تو مساوات کی شکل یہ ہو جائیگی

$ی^2 = (ی^2 - 1)(2 ط لا + لا^2)$

اگر اس بات کو یاد رکھین کہ مبدء راس ہی تو ہم زیر کو اڑا سکتے ہین اور مساوات کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$ی^2 = (ی^2 - 1)(2 ط لا + لا^2)$ ——— (۱)

دوم نقطہ س پر مبدء کو مقرر کرو

چونکہ س ل = ط اور لہ = لا - ط ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھو تو

$$ر^۲ = (ی^۲ - ۱) \left[ ۲ ط (لا - ط) + (لا - ط)^۲ \right]$$

$$= (ی^۲ - ۱)(لا^۲ - ط^۲)$$

اگر اس بات کو یاد رکھیں کہ مبدء مرکز س ہے تو زبر کو اڑا سکتی ہیں اور مساوات کو اسطرح لکھہ سکتی ہیں

$$ر^۲ = (ی^۲ - ۱)(لا^۲ - ط^۲)$$

(۲) یہی فرض کرو کہ لا = ۰ تو $ر^۲ = (ی^۲ - ۱) ط^۲$ اسے قیمت ر کی ناممکن ہو جاتی ہے اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی محور ر کو نہیں تقاطع کرتا - ہم $(ی^۲ - ۱) ط^۲$ کو $ص^۲$ سے تعبیر کرتے ہیں اور محددین س ب اور س ب کو برابر ص کی مان لو ان محددین سے آگے ہمارا بڑا کام نکلیگا تو ہم (۱) کو اسطرح لکھہ سکتے ہیں کہ

$$ر^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲} (۲ ط لا + لا^۲) \quad \text{——— (۳)}$$

اور (۲) کو ہم اسطرح لکھہ سکتے ہیں $ر^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲} (لا^۲ - ط^۲)$ ——— (۴)

اور زیادہ تر قرینہ کے ساتھہ ہم اسطرح لکھہ سکتی ہیں $\frac{لا^۲}{ط^۲} - \frac{ر^۲}{ص^۲} = ۱$ یعنی $ط^۲ ر^۲ - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲$ (۵)

(۲۱۲) چونکہ ا ہ = ی . ط ا اور ط ا = $\frac{ع}{۱+ی}$ اسے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$ا ہ = \frac{ی ع}{۱+ی} = \frac{(ی-۱) ی ع}{ی^۲ - ۱} = (ی - ۱) ط$$

$$ط ا = \frac{ع}{۱+ی} = \frac{ی-۱}{ی} ط$$

$$س ہ = س ا + ا ہ = ط + (ی - ۱) ط = ی ط$$

$$س ط = س ا - ط ا = ط - \frac{ی-۱}{ی} ط = \frac{ط}{ی}$$

$$\text{اور } ط ہ = ع = \frac{ط (ی^۲ - ۱)}{ی}$$

(۲۱۳) اب ہم شبیہ بعد البیضوی کی دریافت کرتے ہیں - مساوات وہ لیتی ہیں جسمیں مبدء مرکز ہے

$$ر^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲} (لا^۲ - ط^۲) \quad \text{——— (۱)}$$

جو قیمت لا کی ط سے کم ہو اوسکی موافق قیمت ر کی ناممکن ہوتی ہے اور جب لا = ط تو ر =

اور جتنی قیمتین لا کی ط سے بڑی ہون اونمین سے ہر ایک کے واسطے ر کی دو قیمتین ہوتی ہین جنکی مقدار مساوی ہی لیکن علامتین مختلف — اسے معلوم ہوا کہ اگر ع ایک نقطہ خط منحنی پر محور لا کی ایک جانب مین ہو تو یہان ع' ایک نقطہ محور کی دوسری جانب مین ایسا ہی کہ ع' م = ع م اسّے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی باعتبار محور لا کے ایک قرینہ رکھتا ہی اور اسکے داہنی جانب مین لا انتہا پہیلتا ہے

اگر ہم لا کی منفی قیمتین لین تو ہر قیمت کے واسطے ر کی وہی دو قیمتین نکلتی ہین جو لا کی مثبت قیمت سے نکلتی ہین اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی کا جیسا حصہ محور ر کی بائین طرف ہی ویسا ہی دائین طرف واقع ہوتا ہی

چونکہ مساوات (۱) اس صورت مین لکہی جاسکتی ہے کہ

$$لا^{2} = \frac{ط^{2}}{ص^{2}} \left( ر^{2} + ص^{2} \right) \qquad (۲)$$

اسمین ہم دیکہتے ہین کہ محور خط منحنی کو قرینہ کی ساتہہ قطع کرتا ہی اور خط منحنی س اسکے اوپر اور نیچے دونو طرف پہیلتا ہے پس خط منحنی مین دو فرع ہین جو آپسمین مشابہت تامہ رکہتی ہین اور غیر متناہی پہیلتی ہین

خط ی ک خط منتظم ہی اور نقطہ ہ ماسکہ ہی — چونکہ خط منحنی خط ب س ب' کی ساتہہ با قرینہ واقع ہے تو اسے یہہ بات نکلتی ہے کہ اگر س ص = س ہ اور س ی' = س ی اور ی' ک' عمود س ی' پر نکالین تو نقطہ ص اور خط ی' ک' ایک دوسرا ماسکہ اور خط منتظم بنائینگے اور اونکی وساطت سے

خط منحنی پیدا ہو سکتا ہی

(۲۱۴) نقطہ س کو مرکز بعید البیضوی کا کہتے ہین اسلئے کہ ہر وتر بعید البیضوی کا جو نقطہ س پر گذرتا ہے س سے تنصیف ہوتا ہی اور یہہ بات اوسیطرح ثابت ہو سکتی ہی جس طرح دفعہ ۱۶۳ مین بیضوی مین ثابت ہوئی

(۲۱۵) محور لا کی جانب مین ہم نے خط منحنی کو مجوف بنایا ہی اس بات کی بیان کرنی سے کوئی فرع خط منحنی کی لین اوسکے اوپر ایک نقطہ معین مقرر کرین اور اوسکی راس اور اس نقطہ معین مین خط مستقیم وصل کرین تو جو حصہ خط منحنی کا اس نقطہ معین اور راس کے درمیان ہوگا اوسکی ہر نقطہ کا معین اوس مستقیم کے نقطہ تناظر کے معین سے بڑا ہوگا

فرض کرو کہ ا راس اور ا ہی مبدء ہی اور ع ایک نقطہ معین ہے اور لا و ی اوسکی محددین ہین تو مساوات بعید البیضوی کی موجب دفعہ ۲۱۱ کے یہہ ہوگی

$$ی = \frac{ص}{ط} \sqrt{(۲ ط لا + لا^۲)}$$

مساوات اع کی یہہ ہے کہ

$$ی = \frac{ی}{لا} لا$$

$$یا\ ی = \frac{ص}{ط} \sqrt{\left(\frac{۲ ط}{لا} + ۱\right)}\ لا$$

اسلئے کہ لا و ی بعید البیضوی پر ہین

فرض کرو کہ لا محدد کم بہ نسبت لا کے ہی تو اس نسبت سی کہ معین خط منحنی کا $\frac{ص}{ط} \sqrt{(۲ ط لا + لا^۲)}$ یا $\frac{ص}{ط} \sqrt{\left(\frac{۲ ط}{لا} + ۱\right)}$ لا اور خط مستقیم کا معین یہہ ہے کہ $\frac{ص}{ط} \sqrt{\left(\frac{۲ ط}{لا} + ۱\right)}$ لا اسے صاف ظاہر ہے کہ معین خط منحنی کا بڑا خط مستقیم کے معین سے ہے

(۲۱۶) ا ا اور ب ب کو محور بعید البیضوی کہتے ہین محور ا ا کو جو خارج ہونی سی ماسکون پر گذرتا ہے محور متقاطع کہتے ہین اور ب ب کو محور مزدوج — بیضوی کی طرح ہم یہان محور اعظم اور اصغر کا استعمال نہین کرتی اسلئے کہ ص = ط $\sqrt{ی^۲ - ۱}$ بموجب دفعہ ۲۱۱ کے اور ی بہ نسبت واحد کے زیادہ ہی تو ص بڑا یا چھوٹا بہ نسبت ط کے ہو سکتا ہی

بعید البیضوی کے کسی نقطہ کا بعد ماسکہ جو نسبت اوس بعد سی رکھتا ہی کہ مابین اوس نقطہ اور خط منتظم کے واقع ہی اوسکو نسبت خارج المرکز بعید البیضوی کی کہتے ہین اور اس نسبت کو ہم ی حرف ہی سے تعبیر کرتے ہین

حاشیہ: مین ثابت ہو چکا ہے شبیہ بعید البیضوی

عرض مستقیم دریافت کرو (دفعہ ۱۲۸ دیکھو) لد = س ہ کے رکھو یعنی = ط ی مساوات

(۱) دفعہ ۲۱۳ مین $ی^2 = \frac{ص^2 ط^2 (ی^2-1)}{} = \frac{ص^4}{ط^2}$

∴ ل ہ = $\frac{ص^2}{ط}$ اور عرض مستقیم = $\frac{2 ص^2}{ط}$

چونکہ $ص^2 = ط^2 (ی^2 - 1)$ ∴ $ص^2 + ط^2 = ط^2 ی^2$ یعنی

$س ب^2 + س ا^2 = س ہ^2$

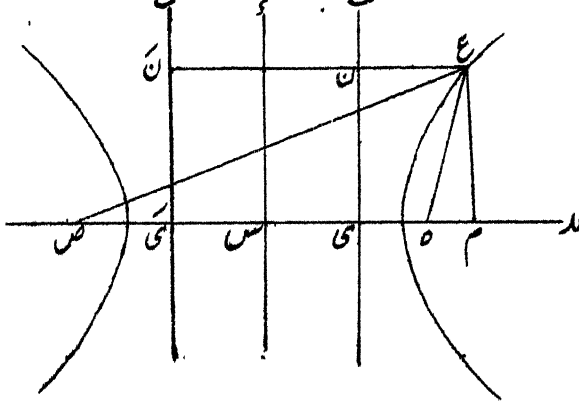
∴ اب = س ہ

(۲۱۷) مساوات بعید البیضوی کی مساوات بیضوی مین $ص^2$ کی جگہہ $-ص^2$ لکھنے سی حاصل ہو سکتی ہے

بعید البیضوی کی وہی بہت سی خاصیتین ہین جو بیضوی کے پہلے ثابت کر چکے ہین اور چونکہ ثبوت دونو

ایک سی ہین اسلئے ہم بعض صورتون مین اونکو مکرر نہین لکہینگے لیکن وہ دفعات بتلا دینگے جنمین اونکا

ذکر ہے اور انہین کے حوالے سے کام لینگے

(۲۱۸) کسی نقطہ کے ابعاد ماسکی کو اوس بعید بیضوی کے کسی نقطہ کی محدد کی رقمون مین بیان کرو

فرض کرو کہ ص ماسکہ ہی اور ی ک اوسکے مطابق خط مستقیم ہی اور ہ دوسرا ماسکہ ہی اور ی ک

خط دوسرا خط منتظم ہی اور ع ایک نقطہ بعید البیضوی پر ہی اور لد اور ی اوسکی محددین ہین اور س

مرکز مسدیر ہے ملاؤ ص ع اور ہ ع اور ع ن ن متوازی محور متقاطع کا نکالو اور ع م

اوسپر عمود ڈالو تو

ص ع = ی م ع ن = ی (س م + س ی) = ی (لد + $\frac{ط}{ی}$) = ی لد + ط

ہ ع = ی . ع ق = ی (س م - س ی) = ی (لا - ی ط) = ی لا - ط

اسے معلوم ہوا کہ ص ع - ہ ع = ۲ ط یعنی بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے ابعاد ماسکی کا تفاوت برابر محور متقاطع کے ہوتا ہے

(۲۱۹) مساوات ی = ص/ط (لا - ط) کو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

ی = ص/ط (لا - ط) (لا + ط)

شکل دفعہ ۲۱۳ کو دیکہو تو معلوم ہوگا کہ

ع م / ا م . ا م = ت س / ا س

## مماس اور عمود المماس بعید البیضوی

(۲۲۰) بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے مماس کی مساوات دریافت کرو

دفعہ ۱۷۰ کی طرح عمل کرنے سے ہمکو یہہ معلوم ہوگا کہ مساوات مماس (لا و ی) کی یہہ ہوگی کہ

ی - ی = ص لا / ط ی (لا - لا)

یعنی ط ی ی - ص لا لا = - ط ص

یہہ مساوات اسطرح حاصل ہو سکتی ہین کہ بیضوی کے مساوات اسی قبیل کی لکھین اور اسمین ص کی جگہہ منفی لکھدین

(۲۲۱) دفعہ ۱۷۱ کے موافق مساوات مماس بعید البیضوی کی اسطرح لکھی جا سکتی ہی کہ

ی = م لا + √(م ط - ص)

اور برعکس اسکے جس مساوات کی یہہ صورت ہو وہ بعید البیضوی کے مماس کی مساوات ہوگی

(۲۲۲) جس طرح دائرہ مین ثابت ہوا ہی کہ مماس اوسکو صرف ایک ہی نقطہ پر مس کرتا ہی اسیطرح بعید البیضوی مین ثابت ہو سکتا ہی کہ وہ ایک نقطہ پر مس کرتا ہی

اور اگر ایک خط بعید البیضوی سی ایک نقطہ پر ملتا ہی تو وہ اکثر مماس بعید البیضوی کا اوس نقطہ پر ہوتا ہے

اسواسطے کہ فرض کرو ط ی - ص لا = - ط ص

مساوات بعید البیضوی کی ہو اور

ی = م لا + س

مساوات خط مستقیم کی ہو تو اونکے تقاطع کے محدد دریافت کرنیکے واسطے

$\text{ط}^2 (\text{م لا} + \text{س})^2 - \text{ص}^2 \text{لا}^2 = - \text{ط}^2 \text{ص}^2$

یا $(\text{ط}^2 \text{م}^2 - \text{ص}^2)\text{لا}^2 + 2\,\text{ط م س لا} + \text{ط}^2(\text{س}^2 + \text{ص}^2) = 0$

اس مساوات کی ہمیشہ دو قیمتیں ہوتی ہیں الا

جب (۱) $\text{ط}^4 \text{م}^2 \text{س}^2 = (\text{ط}^2 \text{م}^2 - \text{ص}^2)\,\text{ط}^2 (\text{س}^2 + \text{ص}^2)$

یا $\text{س}^2 = \text{م}^2 \text{ط}^2 - \text{ص}^2$

اور اس سبب سے معلوم ہوا کہ خط مماس بعید البیضوی کا ہے،

(۲) جب $\text{ط}^2 \text{م}^2 - \text{ص}^2 = 0$ تو مساوات کی تحویل مساوات درجہ اول کی طرف ہو جائیگی اس سبب سے اوسکی ایک قیمت ہوگی۔ پس یہ ثابت ہوا کہ جو خط بعید البیضوی سے ایک نقطہ پر ملتا ہی مماس بعید البیضوی کا ہوتا ہے بشرطیکہ میلان خط کا محور متقاطع کے ساتھہ $\pm \frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ مس ا نہ ہو

(۲۲۳) راس ا اور اَ سے جو مماس نکالے جائیں وہ متوازی محور ی کے ہوتی ہیں دیکھو دفعہ ۱۷۲،

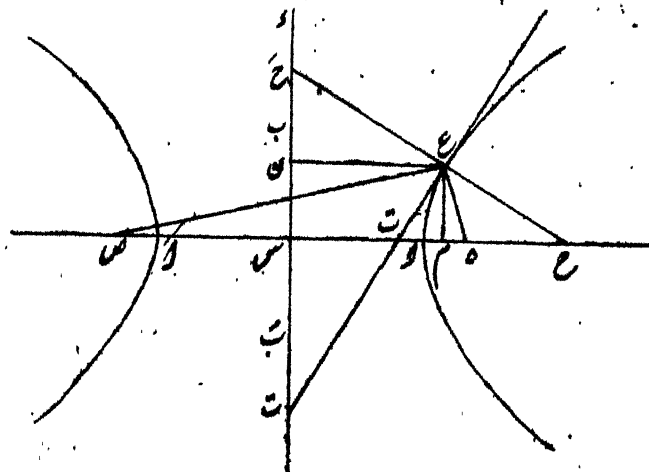
(۲۲۴) بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے عمود المماس کی مساوات دریافت کرو دیکھو دفعہ ۱۷۳

تو اوس سے یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات عمود المماس کی (لا و ی) پر یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = - \frac{\text{ط}^2 \text{یَ}}{\text{ص}^2 \text{لاَ}} (\text{لا} - \text{لاَ})$$

اور اسکو اس صورت سی لکھہ سکتی ہیں

$$\text{ی} = \text{م لا} - \frac{(\text{ط}^2 + \text{ص}^2)\,\text{م}}{\sqrt{\text{ط}^2 - \text{ص}^2 \text{م}^2}}$$ دیکھو دفعہ ۱۷۴

(۲۲۵) اب ہم بعض خواص کا استنباط دفعات گذشتہ کے سے کرتے ہیں

فرض کرو کہ نقطہ ع کے لا و ی محددین ہوں اور ع ت مماس نقطہ ع پر اور ع ح عمود المماس نقطہ ع کا ہو اور ع م اور ع ق عمود محوروں پر نکالو

مساوات مماس کی نقطہ ع پر یہہ ہے

$ط^۲ ی ی - ص^۲ لا لا = - ط^۲ ص^۲$

فرض کرو کہ ی = ۰ تو لا = ط^۲/لا اسے معلوم ہوا کہ

ص ب = س ا^۲ / س م

∴ س ت . س م = س ا^۲

اور علی ہذا القیاس س ن . س ت = س ب^۲

(۲۲۶) دفعہ ۱۷۶ کے موافق ثابت ہو سکتا ہی کہ

س ح = ی^۲ . س م

س ح = (ط^۲ ی^۲ / ص^۲) . ع م

(۲۲۷) دفعہ ۱۷۷ کے موافق ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ

ع ح^۲ = ص^۲ ل ق / ط^۲ اور ع ح^۲ = ط^۲ ل ق / ص^۲

یہاں ص ع = لق اور ہ ع = نق

(۲۲۸) کسی نقطہ سے مماس نکالا گیا اوس نقطہ کی البعاد ماکہ کے زاویہ درمیانی کی تنصیف کرتا ہی

دفعہ ۱۷۸ میں جس طرح عمل کیا ہی یہاں بھی وہی عمل کرنے سے ثابت ہو سکتا ہی کہ

ص ع ح = ہ ع ح

اور اسیواسطے ح ح پر ع ت کے عمود ہونی سے

ت ع ص = ت ع ہ

یا ہم اس نتیجہ کو اس طرح ثابت کر سکتی ہیں کہ

س ح = ی^۲ لا بموجب دفعہ ۲۲۶ کے

∴ ص ح = ی^۲ لا + ط ی

ہ ح = ی^۲ لا - ط ی

اور یہہ ص ع = ی لا + ط اور ہ ع = ی لا - ط

اسے معلوم ہوا کہ ص ح / ہ ح = ص ع / ہ ع

اسیواسطے بحکم (۳ ش ۶ م ۱ اقلیدس کے ع ح زاویہ درمیانی ہ ع اور ص ع ممدودہ کی تنصیف کرتا ہے یعنی

ص ع ح = ہ ع ح

یعنی ص ع حَ = ہ ع ح

(۲۲۹) بعید البیضوی کے کسی نقطہ پر ایک خط مماس ہی اور ماسکہ سی اوسپر عمود نکالا گیا ہی تو اس عمود اور مماس کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

دفعہ ۱۸۰ مین جس طرح ثابت ہوا یہان بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ مقام النقاط مطلوب وہ دائرہ ہی جو محور متقاطع کو قطر مقرر کر کے کہیچین

(۲۳۰) فرض کرو کہ ع عمود کو تعبیر کرتا ہی جو ۃ سے مماس نقطع ع پر نکالین اور عَ راس عمود کو جو مماس پر نکالا جاے تو دفعہ ۱۸۱ کی طرح یہان بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ

ع ا = ص ا ق / ی اور عَ ا = ص ا قَ / ق ∴ ع عَ = ص ا

چونکہ قَ = ۲ ط + ق تو ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

ع ا = ص ا ق / (۲ ط + ق)

(۲۳۱) نقطہ بعید البیضوی کی دو مماس ہر نقطہ بیرونی سی کہیچ سکتی ہین

فرض کرو کہ ح و ق محددین نقطہ بیرونی کے ہین تو دفعہ ۱۸۲ کی طرح ہمکو مساوات ذیل حاصل ہو سکتی ہے جسے محدد نقاط تماس مماسون اور بعید البیضوی کے معلوم ہو جائنگے

لا ا (ط ا ق ا − ص ا ح ا) + ۲ ط ا ص ا ح لا − ط ۴ (ص ا + ق ا) = ۰

اس مساوات درجہ دوم کی قیمتین ممکن ہونگین اگر

ط ۴ ص ۲ ح ۲ + ط ۲ (ص ۲ + ق ۲) (ط ۲ ق ۲ + ص ۲ ح ۲) مثبت ہو یعنی اگر

ق ۲ ط ۲ − ص ۲ ح ۲ + ط ۲ ص ۲ مثبت ہو

لیکن اگر (ح و ق) نقطہ بیرونی ہو تو آخر جملہ مثبت ہوگا اسیواسطے دو مماس اوس نقطہ بیرونی سے بعید البیضوی کی کہیچ سکینگی

حاصل ضرب لا کے دو نو قیمتون کا مساوات درجہ دوم مذکور مین یہہ ہے

$$-\frac{ط^{۴}(ص^{۲}+ق^{۲})}{ط^{۲}ق^{۲}-ص^{۲}ح^{۲}}$$

اب یہہ حاصل ضرب مثبت یا منفی موافق ط۲ق۲ - ص۲ح۲ کے ہوگا یعنی اگر یہہ مثبت تو وہ بہی مثبت ہی اور اگر منفی تو منفی یعنی اگر ط۲ق۲ - ص۲ح۲ مثبت ہی تو دو نو مماس ایک فرع بعید البیضوی کی ہونگی اور اگر وہ منفی ہی تو مختلف فروع کی

یہہ صورت ط۲ق۲ - ص۲ح۲ = ۰ قابل لکھنے کی ہی - یہان ایک قیمت درجۂ دوم کی غیر متناہی ہوجاتی ہے اور دوسری قیمت یہہ ہوتی ہی کہ $\frac{ط^{۴}(ص^{۲}+ق^{۲})}{۲ط^{۲}ص^{۲}ح}$ جبر مقابلہ کا باب ۲۲ دیکھو

اس صورت مین نقطہ (ح وق) ایک خاص خط مین واقع ہوتا ہی اور اس خط کو ممتنع الملاقات کہتے ہین اوسکا ذکر دفعہ ۲۵۵ مین کرینگے - جیسی نقطہ (ح وق) سے دو مماسون کے نکلنے کی کیفیت تہی ویسی ہی خط ممتنع الملاقات کی صورت ہی اگر ح = ۰ اور ق = ۰ تو نقطہ ح اور ق مسد ربر منطبق ہوگا پس اس صورت مین دو خطوط ممتنع الملاقات کا حساب اوسیطرح لگ سکتا ہی جس طرح دو مماسون کا نقطہ (ح وق) سے ہوا ہی

(۲۳۲) ایک نقطہ بیرونی سی بعید البیضوی کی دو مماس نکالی ہین مساوات وتر تماس کی دریافت کرو

فرض کرو کہ ح و ق محددین نقطہ بیرونی کے ہین تو مساوات وتر تماس کی

ط۲ق ی - ص۲ح لا = - ط۲ص۲ ہوگی (دفعہ ۱۸۳ دیکھو)

(۲۳۳) ایک نقطہ معین سے اوتار بعید البیضوی کے کہچے گئے ہین اور ہر وتر کی اطراف سی مماس نکالے گئے ہین تو ان مماسون کے نقاط تقاطع کا مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

فرض کرو کہ ح و ق محددین اوس نقطہ کی ہین جسکے وتر نکالے گئے ہین تو مماسون کے نقاط تقاطع کی مقام النقاط کی مساوات یہہ ہوگی کہ

ط۲ق ی - ص۲ح لا = - ط۲ص۲ (دفعہ ۱۸۴ دیکھو)

(۲۳۴) اگر ایک خط مستقیم کی کسی نقطہ سے بعید البیضوی کے دو مماس نکالین تو اوتار تماس ایک نقطہ معین پر گذرینگے (دفعہ ۱۸۵ دیکھو)

(۲۳۵) طالب علم کو چاہئے کہ مختلف معنی اس مساوات کی خوب سمجھی

ط۲ق ی - ص۲ح لا = - ط۲ص۲

دفعہ ۱۰۳ مین جو دائرہ کے باب مین بیان ہوا ہے وہی بعید البیضوی کے باب مین بیان ہو سکتا ہی

## مثالین

(۱) مساوات اوس بعید البیضوی کی بناو جسکا محور متقاطع معلوم ہی اور اوسکا ارکس فاصلہ کی تنصیف کرتا ہی جو مرکز اور ماسکہ کے مابین واقع ہو دریافت کرو

(۲) معین م ع بعید البیضوی کا ق تک ایسا خارج کرو کہ م ق = ص ع تو مقام النقاط ق کا دریافت کرو

(۳) بعید البیضوی کے راس سے ایک وتر ا ع کھیچا گیا ہی اور نقطہ ق پر اسطرح تقسیم ہوا ہے کہ
اق : ق ع :: اس : ب س اور ق م معین م ع کے طرف پایین تک کھیچا گیا ہی اور نقطہ
ق سے ایک خط زاویے قائے بناتا ہوا ق م پر اور محور متقاطع سی نقطہ ط پر ملتا ہوا کھیچا گیا ہے
تو ثابت کرو کہ اط : اس :: اس : ب س

(۴) ع ق وتر بیضوی کا زاویے قائے محور اکبر ا ا' پر بناتا ہی اور ع ا اور ق ا' خارج ہو کر نقطہ
ر پر ملتے ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ر کا بعید البیضوی ہی وہی محور ہین جو بیضوی کے ہین

(۵) اگر دائرہ بعید البیضوی معلوم کے نقطہ ع پر اور محور متقاطع کی طرفین پر سے گذرتا ہوا
دائرہ کھچین اور معین م ع خارج ہو کر دائرہ سی نقطہ ق پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ق کا
بعید البیضوی ہی جسکا محور مزدوج تناسب ہین اصل بعید البیضوی کے متقاطع اور مزدوج محورون
مین تیسرا ہے

(۶) ایک ایسی نقطہ کا مقام النقاط دریافت کرو کہ جسے دو مماس بیضوی کے نکالین اور وتر تماس
پر عمود ماسکون سے نکالین تو ان عمودون کا حاصل ضرب ہمیشہ مستقل ہو

## بارھوان باب

### بعید البیضوی

### اقطار

(۲۳۶) ایک خط جو کسی نقطہ سے سمت معلوم مین کھیچا جای اور بعید البیضوی سی ملی تو اوسکا
طول دریافت کرو

فرض کرو کہ لا و ی محددین اوس نقطہ کے ہین جسسے خط کہچا گیا ہی اور لا و ی محددین اوس نقطہ کے ہین جس تک خط کہچا گیا ہی اور زاویہ میلان خط کا محور لا کے ساتہہ ر ہی اور طول اوسکا ن ہی توبموجب دفعہ (۲۷) کے لا = لا + ن جم ر   ی = ی + ن جب ر   (۱)

اگر (لا و ی) بعید البضوی پر ہون تو یہہ قیمتین مساوات ط² ی² - ص² لا² = - ط² ص² مین رکہی جا سکتی ہین

پس ان قیمتون کے رکہنے سے یہہ حاصل ہوگا

ط² (ی + ن جب ر)² - ص² (لا + ن جم ر)² = - ط² ص²

∴ ن² (ط² جب² ر - ص² جم² ر) + ۲ن (ط² ی جب ر - ص² لا جم ر)

+ ط² ی² - ص² لا² + ط² ص² = ۰   (۲)

اس مساوات درجہ دوم سے دو قیمتین ن کی حاصل ہونگی اور وہ طول اون دو خطون کے ہونگے جو نقطہ (لا ی) سے بعید البضوی تک سمت معلوم مین کہیچ سکتے ہین

(۲۳۷) بعید البضوی مین نظام معلوم اوتار متوازیہ کا قطر دریافت کرو (دفعہ ۱۴۸ کا حدود دیکہو)

فرض کرو کہ بعید البضوی کے محور تقاطع کے ساتہہ اوتار زاویہ ر پر میل رکہتے ہین اور لا و ی محددین نقطہ وسط کسی وتر کے وترون مین سے ہین تو مساوات جسمی طول خطوط کے جو نقطہ (لا و ی) سے خط منحنی تک کہیچ جائین یہہ ہے

ن² (ط² جب² ر - ص² جم² ر) + ۲ن (ط² ی جب ر - ص² لا جم ر)

+ ط² ی² - ص² لا² + ط² ص² = ۰   (۱)

چونکہ (لا و ی) نقطہ وسط وتر کا ہے تو ن کی جو قیمتین اس مساوات سے دریافت ہونگین آپسمین بلحاظ مقدار کے مساوی ہونگین اور باعتبار علامت کے مختلف اسسے معلوم ہوا کہ امثال ن کے برابر صفر کے ہون یعنی

ط² ی جب ر - ص² لا جم ر = ۰ یا ی = (ص² / ط²) مم ر لا .... (۲)

لا اور ی کو متغیر سمجہین تو یہہ مساوات اوس ایک خط مستقیم کی ہی جو مبدء مین گذرتا ہی

یعنی ہر ایک بعید البضوی ... سے معلوم ہوا کہ ہر قطر مرکز پر گذرتا ہی

اور ہر خط مستقیم جو مرکز مین گذرتا ہی قطر ہے یعنی ایک نظام اوتار متوازیہ کو تنصیف کرتا ہے اسواسطے قدر کی مناسب قیمت مقرر کرنے سے مساوات (۲) اوس خط کو تعبیر کریگی جو مرکز مین گذرتا ہی اگر ر زاویہ میلان محور لا کے ساتھہ اوس قطر کا ہو جو اون تمام اوتار متوازیہ کو جو محور کے ساتھہ زاویہ میل رکھے تنصیف کرتا ہے تو (۲) سے ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\text{مس ر} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} \text{ مم ر}$$

$$\therefore \text{مس ر مس ر} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} \qquad (۳)$$

(۲۳۸) اگر ایک قطر سب وترونکو جو دوسرے قطر کے متوازی ہین تنصیف کرتا ہی تو دوسرا قطر اون سب وترون کی تنصیف کریگا جو پہلے قطر کے متوازی ہین

فرضکرو کہ ر۱ اور ر۲ زاویے میلان دو قطرون کے بعید البضوی کے محور متقاطع کے ساتھہ ہین چونکہ اول قطر دوسرے قطر کے اوتار متوازیہ کی تنصیف کرتا ہی اسلئے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{مس ر}_2 \text{ مس ر}_1 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$$

اور یہی شرط ہونی چاہئے تہی کہ دوسرا قطر پہلے قطر کے سب متوازی وترون کی تنصیف کرے دفعہ ۱۹۱ کا حدود بعید البضوی کے واسطے بہی ہے

(۲۳۹) ہر خط مستقیم جو مرکز بیضوی مین گذرتا ہی بیضوی سی ملتا ہی اور یہہ شکل سی ہی ظاہر ہے اور اسلوب تحلیلی سے بہی ثابت ہی۔ لیکن یہہ بات بعید البضوی مین نہین ہی آگے اوسے ثابت کرینگے

(۲۴۰) جو خط مستقیم مرکز مین گذرتا ہی اوسکے اور بعید البضوی کے نقاط تقاطع دریافت کرو

فرضکرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہہ ہے کہ

$$\text{ی} = \text{م لا}$$

اس قیمت کو مساوات بعیدی البضوی $\text{ط}^2 \text{م}^2 \text{لا}^2 + \text{ص}^2 \text{لا}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$ مین رکہو تو نقاط تقاطع کے محدد دریافت کرنے کے واسطے یہہ مساوات حاصل ہوگی کہ

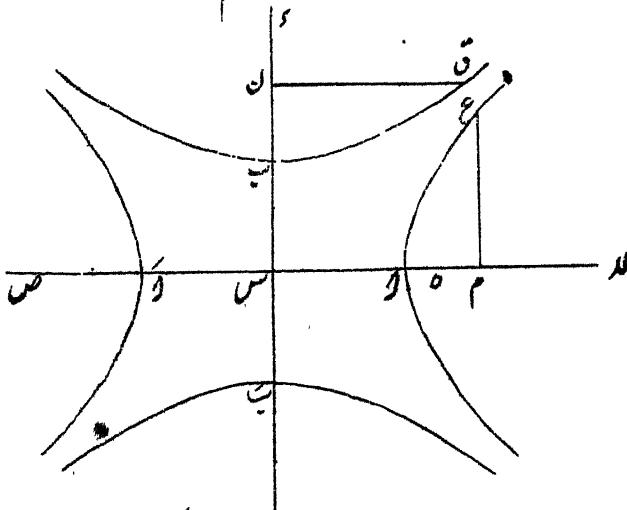
(ط² م² − ص²) لا² = − ط² ص²

∴ لا² = ط² ص² / (ص² − ط² م²)

اسسے معلوم ہوا کہ اگر ط² م² بڑا ص² سے ہو تو لا کی قیمتیں ناممکن ہو جائینگی
پس ثابت ہوا کہ خط مرکز بعید البیضوی میں سے کھینچا گیا بعید البیضوی سے نہیں ملیگا اگر وہ محور متقاطع کے کسی طرف زاویہ ایسا بنائے جو بڑا س ا ص/ط سے ہو

(۲۴۱) بعید البیضوی کے بابت ان تو عمودوں کے بیان کرنیکے لئے ضرور ہے کہ ہم یہہ حد ذرا بڑہے

تعریف جب دو بعید البیضوی ایسے ہوں کہ جو ایک بعید البیضوی میں محور متقاطع ہو وہ دوسرے بعید البیضوی میں محور مزدوج ہو اور جو پہلے بعید البیضوی کا محور مزدوج ہو وہ دوسرے کا محور متقاطع ہو تو دوسرے بعید البیضوی کو بعید البیضوی مزدوج کہتے ہیں

(۲۴۲) ایک بعید البیضوی معلوم کے مزدوج بعید البیضوی کی مساوات دریافت کرو
فرض کرو کہ ا اَ اور ب بَ بعید البیضوی معلوم کے متقاطع اور مزدوج محور ہوں تو ب بَ محور متقاطع اور ا اَ محور مزدوج بعید البیضوی مزدوج کا ہوگا۔ فرض کرو کہ ع نقطہ معلوم بعید البیضوی میں ہے اور ق ایک نقطہ بعید البیضوی مزدوج میں ہے ع م اور ق ن عمود



س لا اور س ی پر نکالو۔ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہے کہ

ی² = ص²/ط² (لا² − ط²)

∴ ع م² = س ب²/س ا² (س م² − س ا²)

پس معلوم ہوا کہ $\text{ق ن}^2 = \frac{\text{س ا}^2}{\text{س ب}^2}(\text{س ن}^2 - \text{س ب}^2)$

چونکہ ق ایک نقطہ بعید البضوی پر ہے تو س ب اور س ا نصف محور متقاطع اور نصف محور مزدوج ہین
پس اگر لا و ی محددین نقطہ ق کو تعبیر کرین تو

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2}(\text{ی}^2 - \text{ص}^2)$$

اسلیے یہہ مساوات بعید البضوی مزدوج کی ہی اور ہم یہہ دیکھتے ہین کہ اگر اصل بعید البضوی کی مساوات مین $-\text{ط}^2$ کی جگہہ $\text{ط}^2$ لکھدیتے اور $\text{ص}^2$ کی جگہہ $-\text{ص}^2$ تو اوسے مساوات بعید البضوی مزدوج کی معلوم ہوجاتی ماسکہ بعید البضوی مزدوج کے خط ب س ی پر ہونگے اور اوسکا فاصلہ س سے = اب بموجب دفعہ ۲۱۶ کے ہوگا یعنی وہی فاصلہ ہوگا جو ص اور ہ کا س سے ہے

(۲۴۳) بعید البضوی کے مرکز سے کوئی خط مستقیم کھینچا گیا ضرور بعید البضوی سے یا بعید البضوی مزدوج سے ملتاہے الا وہ دو خطوط جو محور متقاطع بعید البضوی سے اس زاویہ $= \text{مس}^{-1}\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ پر میل رکھتے ہین
فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہہ ہو کہ

$$\text{ی} = \text{م لا} \quad (۱)$$

مساوات جسمین نقاط تقاطع (۱) اور بعید البضوی کے معلوم ہون بموجب دفعہ ۲۴۰ کی یہہ ہے کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{\text{ص}^2 - \text{ط}^2\text{م}^2} \quad (۲)$$

اور علی ہذا القیاس مساوات جسمے نقاط تقاطع (۱) اور بعید البضوی مزدوج کے معلوم ہون یہہ ہے کہ

$$\text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^2\text{ص}^2}{\text{ط}^2\text{م}^2 - \text{ص}^2} \quad (۳)$$

اگر م کم بنسبت $\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ کے ہو تو (۲) مین قیمتین ممکن اور (۳) مین قیمتین ناممکن لا کی ہونگین اور اگر $\text{م}^2$ بڑا $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ سے ہو تو (۲) مین ناممکن قیمتین اور (۳) مین ممکن قیمتین لا کی ہونگین اور اگر $\text{م}^2 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}$ تو (۲) اور (۳) کی قیمتین لا کی غیر متناہی ہونگین پس اسسے ثابت ہوا کہ دو خط جو محور متقاطع بعید البضوی معلوم سے زاویہ برابر $\text{مس}^{-1}\frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ کے بناتے ہین اونمین سے کوئی بھی کسی خط منحنی سے نہین ملتا اور اور خطوط مین سے ہر ایک خط کسی ایک بعید البضوی سے ملتاہے

(۲۴۴) جو اقطار مزدوج مین سے ایک اصلی بعید البیضوی سی اور دوسرا بعید البیضوی مزدوج سی ملتا ہی

فرض کرو کہ مساوات اُنھین قطرون کی یہہ ہین

$ی = م لا$ اور $ی = م' لا$

تو بموجب دفعہ ۲۳۱ کے $م م' = \frac{ص^2}{ط^2}$ ∴ $م' = \frac{ص^2}{ط^2 م}$

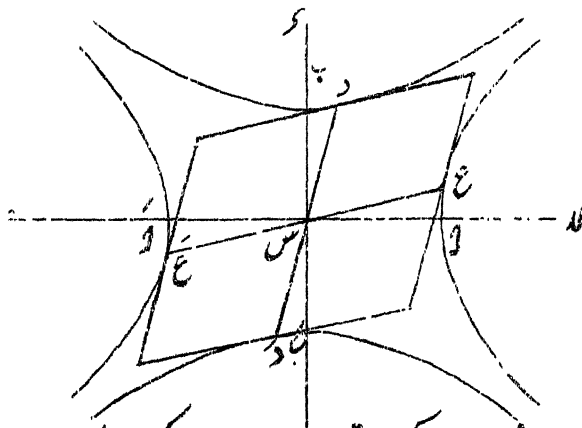
اسے معلوم ہوا کہ م کم بہ نسبت $\frac{ص}{ط}$ کے ہو تو م' بڑا بہ نسبت $\frac{ص}{ط}$ کے ہوگا اسے معلوم ہوا کہ قطر اصل بعید البیضوی سے ملتا ہے اور دوسرا بعید البیضوی مزدوج سی - اگر م بڑا $\frac{ص}{ط}$ سے ہو تو م' کم بہ نسبت $\frac{ص}{ط}$ کے ہوگا پس معلوم ہوا کہ اول قطر بعید البیضوی مزدوج سے ملتا ہی اور دوسرا اصل بعید البیضوی سے

(۲۴۵) اب ہم بعض خواص اقطار مزدوج بیان کرتی ہین - جب ہم کہتے ہین کہ قطر کی طرفین سے مراد وہ نقطے ہوتے ہین جنپر قطر اصل بعید البیضوی کو یا مزدوج بعید البیضوی کو قطع کرتا ہی ہم اس بات کو کہہ سکتے ہین کہ اصل بعید البیضوی کو جو ارتباطات باہمی بعید البیضوی مزدوج سے ہوتی ہین وہی بعید البیضوی مزدوج کو اصل بعید البیضوی سے تعلقات ہوتے ہین پس اب اسطرح انکی تعریف ہوسکتی ہے کہ دو بعید البیضویان مزدوج کہلاتی ہین جب اونمین سے ایک کا محور متقاطع دوسرے کا محور مزدوج ہو اور نیز اگر ایک خط تمام اوتار متوازیہ کی جو ایک بعیضوی پر ختم ہوتے ہین تنصیف کرتا ہی تو وہ تمام وترونکی جو دوسرے بعید البیضوی پر ختم ہوتے ہین تنصیف کریگا - اسواسطے کہ مساوات دفعہ ۲۳۷ کی $م م' = \frac{ص^2}{ط^2}$ مین کچھہ تبدل نہین ہوتا جب ہم - ط² کو بجای ط² کے اور - ص² کو بجای ص² کے لکھین یعنی جب ہم بعید البیضوی اصل سے بعید البیضوی مزدوج کی طرف مراجعت کرین (دفعہ ۲۴۲) دونو خط منحنی اس مساوات مین شامل ہین کہ

$(ط^2 ی^2 - ص^2 لا^2) = ط^2 ص^2$

(۲۴۶) کسی قطر کے ایک طرف سی جو مماس نکالا جاے تو وہ متوازی اون وترون کے ہوگا جنکے قطر تنصیف کرتا ہی دفعہ ۱۹۰ دیکھو

(۲۴۷) قطر کے ایک طرف کے محددین معلوم ہین تو قطر مزدوج کے ہر ایک طرف کے محددین دریافت کرو

فرض کرو کہ اس ا اَ اور ب س بَ محور بعید البضوی کے ہین اور س ع اور د س دَ دو قطر مزدوج ہین

اور لاَ و یَ محددین نقطہ ع کے ہین تو مساوات س ع کی یہہ ہے

$$\text{ی} = \frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}\ \text{لا} \qquad (1)$$

چونکہ قطر مزدوج د دَ متوازی نقطہ ع کے مماس کا ہے تو مساوات د دَ کی یہہ ہے

$$\text{ی} = \frac{\text{ص}^2\ \text{لاَ}}{\text{ط}^2\ \text{یَ}}\ \text{لا} \qquad (2)$$

اب ہم مساوات (۲) کو مساوات بعید البضوی مزدوج کے ساتھ ملا کر محددین د اور دَ کے دریافت کرتے ہین (۲) سے نکال کر

$$\text{ط}^2\ \text{ی}^2 - \text{ص}^2\ \text{لا}^2 = \text{ط}^2\ \text{ص}^2 \ \text{مین لکھو تو}$$

$$\text{ط}^2\ \frac{\text{ص}^4\ \text{لاَ}^2}{\text{ط}^4\ \text{یَ}^2}\ \text{لا}^2 - \text{ص}^2\ \text{لا}^2 = \text{ط}^2\ \text{ص}^2$$

$$\therefore (\text{ص}^2\ \text{لاَ}^2 - \text{ط}^2\ \text{یَ}^2)\ \text{لا}^2 = \text{ط}^4\ \text{یَ}^2$$

$$\therefore \text{لا}^2 = \frac{\text{ط}^4\ \text{یَ}^2}{\text{ط}^2\ \text{ص}^2} = \frac{\text{ط}^2\ \text{یَ}^2}{\text{ص}^2}$$

$$\therefore \text{لا} = \pm \frac{\text{ط}\ \text{یَ}}{\text{ص}}$$

$$\therefore (2)\ \text{سے}\ \text{ی} = \pm \frac{\text{ص}\ \text{لاَ}}{\text{ط}}$$

شکل مین محدد دَ کا مثبت ہی اور دً کا منفی ہے اسے معلوم ہوا کہ اوپر کی علامت سے دَ اور نیچے کی علامت سے دً مراد ہے

(۲۴۸) دو مزدوج نصف قطرون کے مربعون کا تفاوت مستقل ہوتا ہے کبھی متغیر نہین ہوتا

فرضکرو کہ لاَ و یَ محددین نقطہ ع کی ہین تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

$$س عَ^2 - س دَ^2 = لاَ^2 - یَ^2 - \frac{ط^2 یَ^2}{ص^2} - \frac{ص^2 لاَ^2}{ط^2}$$

$$= \frac{ص^2 لاَ^2 - ط^2 یَ^2}{ص^2} + \frac{ط^2 یَ^2 - ص^2 لاَ^2}{ط^2}$$

اسسے معلوم ہوا کہ دو نصف قطرون مزدوج کے مربعون کا تفاوت برابر نصف محورون کے مربعون کے تفاوت کی ہوتا ہی

(۲۴۹) اوس متوازی الاضلاع کا جو رقبہ قطر مزدوج کے اطراف سی مماس نکالنی سی بنتا ہی

فرضکرو کہ س عَ اور س دَ قطر مزدوج ہین دفعہ ۲۴۷ کی شکل دیکھو - مماس جو نقاط عَ و دَ و عَ و دَ پر مس کرتے ہوئی نکالین جائین اوسسے جو متوازی الاضلاع بنتا ہی اوسکا رقبہ ۴ س ع . س د جب ع س د یا ۴ ع . س د ہی اسمین ع اوس عمود کو تعبیر کرتا ہی کہ س سے مماس ع پر نکالا جاوے - فرض کرو کہ لاَ و یَ محددین نقطہ ع کے ہین تو مساوات مماس کی یہہ ہوگی کہ

$$ی = \frac{ص^2 لاَ}{ط^2 یَ} لا - \frac{ص^2}{یَ}$$

پس بموجب دفعہ ۴۷ کے

$$ع = \frac{\frac{ص^2}{یَ}}{\sqrt{1 + \frac{ص^4 لاَ^2}{ط^4 یَ^2}}}$$

$$= \frac{ط^2 ص^2}{\sqrt{ط^4 یَ^2 + ص^4 لاَ^2}}$$

$$اور\ س د = \sqrt{\frac{ط^2 یَ^2}{ص^2} + \frac{ص^2 لاَ^2}{ط^2}} = \frac{\sqrt{ط^4 یَ^2 + ص^4 لاَ^2}}{ط ص}$$

$$\therefore ۴ ع . س د = ۴ ط ص$$

اسسے ثابت ہوا کہ اقطار مزدوج کے انجاموں سے جو مماس نکالے جائین اور اونکے ملنے سی جو متوازی الاضلاع پیدا ہو اوسکا رقبہ برابر ہوتا ہی اوس متوازی الاضلاع کے رقبہ کے جو محورون کی اطراف سے مماس نکالنے سے پیدا ہوتی ہے

(۲۵۰) فرض کرو کہ طَ و صَ دو مزدوج نصف قطرون کے طول ہین اور ھ اونکے درمیان کا زاویہ ہے تو بموجب دفعہ گذشتہ کے

$$طَ صَ \ جب\ ھ = ط ص$$

اگر نقطہ ع کو بعید البیضوی پر ا کی جانب سے متحرک کرین تو س ع یا ط کو جتنا چاہین بڑا کر سکتے ہین — اور نیز اس سبب سے کہ ط² — ص² مقدار مستقل ہے ط کے بڑہنے سے اوسکے ساتھہ ص بہی بڑہتا ہی — پس جب ھ جسقدر چاہین چہوٹی ہو سکتی ہی یعنی س ع اور س د کو ایسا قریب لا سکتے ہین جسقدر چاہین مقام محصور جسکی طرف وہ میل رکہتے ہین آسانی سے دریافت ہو سکتا ہی اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۲۴۲ کے

م م´ = ص² / ط ا

پس جب س ع اور س د کی منطبق ہوتے پر نوبت پہونچتی ہے اوسوقت م اور م´ کی حد ± ص² / ط کے قریب پہونچتی ہے

(۲۵۱) دفعہ ۲۴۹ سے ہمکو یہہ حاصل ہی کہ

ع´ = ط² ص² / س د² = ا² ص² / (س ع² — ط² ا + ص²) بموجب دفعہ ۲۴۸ کے

اس مساوات سے وہ ارتباط معلوم ہوتا ہی جو عمود کہ مرکز سے نکالا گیا نقطہ کے مماس ع پر بعد س ع سے رکہتا ہی جو اوس نقطہ اور مرکز کے درمیان واقع ہے

اگر س اوس زاویہ کو تعبیر کرے جو عمود محور متقاطع کے ساتھہ بناتا ہی تو ہم دفعہ ۱۹۶ مین ثابت کر سکتے ہین کہ

ع² = ط² (ا — ی² جب² س)

(۲۵۲) اقطار مزدوج کو محور مقرر کرکے مساوات بعید البیضوی کی دریافت کرو

فرض کرو کہ س ع اور س د دو اقطار مزدوج ہین (شکل دفعہ ۲۴۷ دیکہو) س ع کو محور لا اور س د کو محور ی قرار دو اور ع س ا = ھ اور د س ا = ب کے فرض کرو اور لا ی محددین بعید البیضوی کے کسی نقطہ کے بلحاظ اصل محورون کے اور لا´ ی´ بلحاظ نئی محورون کے فرض کرو

تو بموجب دفعہ (۸۴) کے

لا = لا´ جم ھ + ی´ جم ب

ی = لا´ جب ھ + ی´ جب ب

ان قیمتونکو مساوات

ط² ی² — ص² لا² = — ط² ص² مین رکہو

تو ط² (لا´ جب ھ + ی´ جب ب)² — ص² (لا´ جم ھ + ی´ جم ب)² = — ط² ص²

یا لا´² (ط² جب² ھ — ص² جم² ھ) + ی´² (ط² جب² ب — ص² جم² ب)

+ ۲ لا ی (ط² جب ه جب ب - ص² جم ه جم ب) = - ط² ص²

لیکن س ع اور س د اقطار مزدوج ہین اسلیئے

مس ه مس ب = ص² / ط²

اس سببسے امثال لا ی کے فنا ہوتی ہین اور مساوات کی یہہ صورت ہوتی ہے کہ

لا² (ط² جب² ه - ص² جم² ه) + ی² (ط² جب² ب - ص² جم² ب) = - ط² ص²

اس مساوات مین فرض کرو کہ ی = ۰ تو

لا² = - ط² ص² / (ط² جب² ه - ص² جم² ه) = ط² ص² / (ص² جم² ه - ط² جب² ه)

اور یہہ قیمت س ع² کی ہے جو ط'² سے تعبیر ہو سکتا ہی

اگر ہم لا = ۰ کے مساوات بالا مین درج کرین تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ی² = - ط² ص² / (ط² جب² ب - ص² جم² ب)

اب چونکہ ہم نے یہہ فرض کیا ہی کہ ط محور جدید لا کا خط منحنی کسے ملتا ہی تو ہمکو بموجب دفعہ ۲۸۸ کے یہہ معلوم ہے کہ محور جدید ی کا خط منحنی سے نہین ملتا پس

- ط² ص² / (ط² جب² ب - ص² جم² ب)

ایک مثبت مقدار نہین ہے اسلیئے ہم اوسکو - ص'² سے تعبیر کرسکتے ہین

اس سببسے مساوات بعید البیضوی کی بلحاظ اقطار مزدوج کے یہہ ہوگی

لا² / ط'² - ی² / ص'² = ۱

یا مقادیر متغیر پر سے زبر کو اڑادو تو

لا² / ط² - ی² / ص² = ۱

اور نیز مساوات بعید البیضوی مزدوج کی بلحاظ اونہین محوروں کے

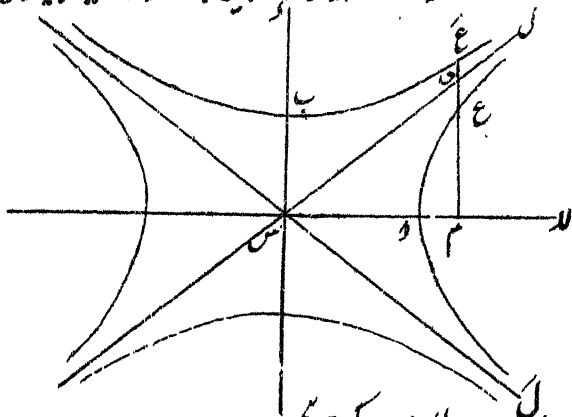
لا² / ط² - ی² / ص² = - ۱

مساوات بعید البیضوی کی مماس کی بھی وہی صورت ہوگی جو اوسکی ہوتی ہی خواہ محور قائم الزاویہ خواہ غیر قائم الزاویہ زوج اقطار مزدوج سے نہین دفعہ ۲۰۰ کو دیکھو

(۲۵۳) کسی وتر بعید البیضوی کے اطراف سے جو مماس نکالین وہ اوس قطر پر ملتے ہین جو اوس وتر کی تنصیف کرتا ہی دفعہ ۲۰۱ دیکھو

(۲۵۴) اگر بعید البیضوی کے قطر اور وتر باہم متوازی ہون تو وہ شکل متوازی قطر مزدوج کا ہوگا (دفعات ۲۰۲ و ۲۰۳ دیکھو)

## خطوط ممتنع الملاقات

(۲۵۵) اب تک ہم نے جو بعید البیضوی کے خواص بیان کئے ہین وہ بیضوی کے خواص سے بہت مشابہت رکہتے تہے اب ہم وہ خواص بعید البیضوی کے بیان کرتے ہین جو مخصوص بعید البیضوی کے ساتہہ ہین

فرض کرو کہ مساوات بعید البیضوی کی یہہ ہے

$$\text{ی}^2 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}\left(\text{لا}^2 - \text{ط}^2\right)$$

اور فرض کرو کہ س ل ایسا خط ہی جسکی مساوات یہہ ہی کہ

$$\text{ی} = \frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{ط}}$$

فرض کرو کہ م ع ق ایک معین بعید البیضوی کا ہی جو بعید البیضوی سے نقطہ ع پر اور س ل سے نقطہ ق پر ملتا ہی تو اگر س م کو لا سے تعبیر کرین تو

$$\overline{\text{ع م}} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2} \quad \text{اور} \quad \overline{\text{ق م}} = \frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{ط}}$$

$$\therefore \overline{\text{ع ق}} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\left[\text{لا} - \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}\right] = \frac{\text{ص}}{\text{ط}} \cdot \frac{\text{ط}^2}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}} = \frac{\text{ط ص}}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ط}^2}}$$

اگر ایسے خط م ع ق اس طرح متحرک ہو کہ ہمیشہ اپنا متوازی رہے تو فاصلہ ع ق برابر کم ہوتا جایگا

اور س م کو کافی بڑا کر ع ق کو جتنا چاہین گھٹا سکتے ہین - خط س ل کو خط ممتنع الملاقات خط منحنی کلّ کہتے ہین
اور علی ہذا القیاس خط س لَ جسکی مساوات یہہ ہے

$$ی = - \frac{ص}{ط} لا$$

خط ممتنع الملاقات کہتے ہین
پس مساوات

$$\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{ی^2}{ص^2} = 0$$

مین دو خطوط ممتنع الملاقات شامل ہین

حد ممتنع الملاقات وہ خط مستقیم ہوتا ہی کہ جسکا فاصلہ خط منحنی کی ایک نقطہ سے اوتنا بعید کم ہوتا جاتا ہے جتنا یہہ نقطہ لا انتہا فاصلہ پر مبدء سے ہوتا جاتا ہے

بعد نقطہ ع کا س ل سے ع غ ق جب ع ق س ہی اور ہم لکہہ آئی ہین کہ ع ق بعید کم ہوتا جاتا ہے جیسا کہ ع مبدء سے پرے متحرک ہوتا ہی تو س ل ممتنع الملاقات بموجب حدود کے ہوا

(۲۵۶) اسیطرح ہم ثابت کر سکتے ہین کہ س ل ممتنع الملاقات بعید البیضوی مزدوج کا ہی - اسواسطے کہ م ع کو خارج کرو کہ بعید البیضوی مزدوج سے نقطہ عَ پر ملین تو بموجب دفعہ ۲۴۳ کے

$$عَ م = \frac{ص}{ط} \sqrt{لا^2 + ط^2}$$

$$\therefore عَ ق = \frac{ص}{ط} \left[ \sqrt{لا^2 + ط^2} - لا \right] = \frac{ص ط}{\sqrt{لا^2 + ط^2} + لا}$$

اِسے معلوم ہوا کہ س م غیر متناہی زیادہ ہوا ہے اور عَ ق غیر متناہی کم ہوا ہے اسواسطے س ل بعید البیضوی مزدوج کا ممتنع الملاقات ہے

(۲۵۷) مساوات بعید البیضوی کی نقطہ (لا و ی) پر یہہ ہے کہ

$$ط^2 ی ی' - ص^2 لا لا' = - ط^2 ص^2$$

$$\therefore ی' = \frac{ص^2 لا لا'}{ط^2 ی} - \frac{ص^2}{ی}$$

$$= \frac{ص}{ط} \cdot \frac{لا لا'}{\sqrt{لا^2 - ط^2}} - \frac{ص^2}{ی}$$

$$= \frac{ص لا'}{ط \sqrt{1 - \frac{ط^2}{لا^2}}} - \frac{ص^2}{ی}$$

اگر لا و ی غیر متناہی بڑہ جائین تو حد جسکے قریب مساوات مذکور ہوتی ہی یہہ ہے کہ

$$ی = \frac{ص}{ط} لا'$$

پس اسے معلوم ہوا کہ بعید القطعی کا مماس ہمیشہ ممتنع الملاقات کے منطبق ہونے کے قریب ہوتا ہی
جب نقطہ تماس اصل سے آگے کی طرف غیر متناہی حرکت کرتا ہی

(۲۵۸) دفعہ ۲۴۳ سی ظاہر ہوتا ہی کہ ہر خط مستقیم مرکز بعید القطعی سی کھچا گیا بعید القطعی سی یا
بعید القطعی مزدوج سی ملتا ہی بشرطیکہ اوسکی سمت منطبق خطوط ممتنع الملاقات کے کسی ایک ہی سمت نہ ہو
اور دفعہ ۲۵۰ سی ظاہر ہوتا ہی کہ اقطار مزدوج لا انتہا زیادہ ہوتے ہین تو وہ خطوط ممتنع الملاقات مین سے
ایک پر منطبق ہونے کے قریب پہونچتی ہین

(۲۵۹) اقطار مزدوج کی اطراف مین جو خط وصل کیا جاوے وہ ایک ممتنع الملاقات کا متوازی ہوتا ہے اور
دوسرے سی تنصیف ہوتا ہی

فرض کرو کہ بعید القطعی کے کسی نقطہ ع کی محددین لاَ و یَ ہین (دفعہ ۲۴۷ شکل دیکھو)
پس بموجب دفعہ ۲۴۷ کی قطر مزدوج کے ایک طرف د کے محددین

$\frac{\text{ط}\,\text{یَ}}{\text{ص}}$ اور $\frac{\text{ص}\,\text{لاَ}}{\text{ط}}$ ہین

اس سبب سے مساوات دع کے یہہ ہے کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{یَ} - \frac{\text{ص}\,\text{لاَ}}{\text{ط}}}{\text{لاَ} - \frac{\text{ط}\,\text{یَ}}{\text{ص}}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right)$$

یعنی $\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right)$

اسی واسطے دع متوازی ممتنع الملاقات کا ہے

$$\text{ی} = -\frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{ط}}$$

اور بموجب دفعہ ۱۰ کے دع کے نقطہ وسط کے محددین یہہ ہین

$$\tfrac{1}{2}\left(\text{لاَ} + \frac{\text{ط}\,\text{یَ}}{\text{ص}}\right) \text{ اور } \tfrac{1}{2}\left(\text{یَ} + \frac{\text{ص}\,\text{لاَ}}{\text{ط}}\right)$$

یعنی $\frac{\text{ط}\,\text{یَ} + \text{ص}\,\text{لاَ}}{2\,\text{ص}}$ اور $\frac{\text{ط}\,\text{یَ} + \text{ص}\,\text{لاَ}}{2\,\text{ط}}$ ہین

یہہ محددین اس مساوات کی شرائط کو پورا کرتی ہین

$$\text{ی} = \frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{ط}}$$

اسواسطے ممتنع الملاقات $\text{ی} = \frac{\text{ص}\,\text{لا}}{\text{ط}}$ تنصیف ع د کی کرتا ہی

اور چونکہ متوازی الاضلاع کے قطر ایک دوسرے کو تنصیف کرتے ہین اور ع د قطر متوازی الاضلاع کا ہی جسکے س ع اور س د متصل کے ضلاع ہین تو دوسرا قطر ممتنع الملاقات پر منطبق ہوتا ہے یعنی مماس جو نقاط ع اور د سے نکالے جائین ممتنع الملاقات پر ملتے ہین

(۲۶۰) مساوات بعید الضیوی کی جسکی محور اقطار مزدوج ہین یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = 1 \qquad (1)$$

تو مساواتین ممتنع الملاقاتون کی بلحاظ ان محورون کے یہہ ہی کہ

$$\text{ی} = \frac{\text{ص}}{\text{ط}}\text{لا} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = -\frac{\text{ص}}{\text{ط}}\text{لا} \qquad (2)$$

اسواسطے کہ دفعہ ۲۴۳ کی طرح ثابت کر سکتے ہین کہ خطوط جو (۲) سی تعبیر ہوتی ہین صرف یہی خطوط ہین جو مرکز مین گذرتے ہین اور (۱) سے ملتے ہین نہ اوسکے قطر مزدوج سے اسے معلوم ہوا کہ خطوط ممتنع الملاقات بموجب دفعہ ۲۸۵ کے ہین

اور یہی نتیجہ اسطرح حاصل ہو سکتا ہی کہ اصل مساوات بعید الضیوی کی یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = 1$$

اور مساوات دو ممتنع الملاقات کی یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = 0$$

اگر لا اور ی کی قیمتین نئی محددین لا اور ی کی رقمون مین رکھین اور زیر کو مقادیر متغیر پر سی اڑا دین تو پہلی مساوات کی یہہ صورت ہو جایگی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = 1$$

اور انہین قیمتون کے رکھنے سی دوسری مساوات کی یہہ صورت ہو جایگی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = 0$$

(۲۶۱) ممتنع الملاقات کو محور بنا کر مساوات بعید الضیوی کی دریافت کرو

فرض کرو کہ س لا اور س ی اصل محور ہون اور س لا اور س ی نئی محور ایسے ہون کہ س لا اور س ی مخالف جانبون مین س لا کے اوسکے ساتھہ زاویہ ھ پر ایسی مائل ہین کہ مس ھ $= \frac{\text{ص}}{\text{ط}}$ اور لا اور ی محددین نقطہ ع کی بلحاظ قدیم محورون کے اور لا اور ی محددین اوسی نقطہ کے

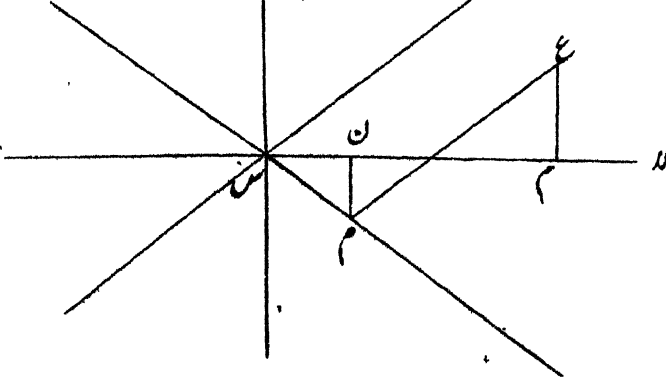
بلحاظ جدید محورون کے ہون — ع م متوازی س ی کا اور ع م اور م ن مین سے ہر ایک متوازی س د کا ہو تو

پس ی = ع م = (ی − لا) جب ھ

اور نیز جم ھ = ط / √(ط² + ص²) اور جب ھ = ص / √(ط² + ص²) ان قیمتون کو مساوات مین رکھو

ط² ی² − ص² لا² = − ط² ص²

تو ط² ص² (ی − لا)² − ط² ص² (ی + لا)² = − ط² ص² (ط² + ص²)

یا لا ی = (ط² + ص²) / ۴

اور زبر و ن کو ساقط کرو تو

لا ی = (ط² + ص²) / ۴

بموجب دفعہ ۲۴۴ کے مساوات بعید البیضوی مزدوج پہلے محورون کے موافق یہہ ہے

لا ی = − (ط² + ص²) / ۴

(۲۶۲) ممتنع الملاقات کو محور قرار دیکر بعید البیضوی کے مماس کی جو کسی نقطہ پر نکالا جاے مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ لا و ی محددین نقطہ کے ہون

اور لا′ و ی′ محددین متصل نقطہ کے خط منحنی پر تو مساوات خط قاطع کی ان نقطون پر یہہ ہوگی کہ

ی − ی = (ی′ − ی) / (لا′ − لا) (لا − لا) (۱)

چونکہ (لا، ی) اور (لاَ، یَ) بعید البضوی پر نقطے ہین

$$\text{لا ی} = \frac{1}{2}\left(\text{ط}^2 + \text{ص}^2\right)$$

$$\text{لاَ یَ} = \frac{1}{2}\left(\text{ط}^2 + \text{ص}^2\right)$$

$$\text{لاَ یَ} = \text{لا ی}$$

اسسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) اسطرح لکہی جا سکتی ہین کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{لاَ یَ} - \text{یَ}}{\text{لاَ} - \text{لا}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right)$$

یا

$$\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right)$$

اب چونکہ حد نہائی کی حالت مین لاَ = لا اسسے معلوم ہوا کہ مساوات تماس کی نقاط (لاَ، یَ) پر یہہ ہوگی

$$\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\text{یَ}}{\text{لاَ}}\left(\text{لا} - \text{لاَ}\right) \qquad (۲)$$

یہہ مساوات سیدہی سادی بن سکتی ہے اگر لاَ مین ضرب دو تو

$$\text{ی لاَ} + \text{لا یَ} = ۲\,\text{لاَ یَ} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{۲}$$

(۲۶۳) مماس (لاَ، یَ) پر محور لا سے جہان ملتا ہے اوس نقطہ کی دریافت کرنیکے لئے

ی = ۰ مساوات مین رکہو تو

$$\text{ی لاَ} + \text{لا یَ} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{۲}$$

$$\text{پس لا} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{۲\,\text{یَ}} = \frac{۲\,\text{لاَ یَ}}{\text{یَ}} = ۲\,\text{لاَ}$$

علی ہذا القیاس اوس نقطہ کے دریافت کرنیکے لئے جہان محور ی کو مماس قطع کرتا ہے لا = ۰ مساوات مین درج کرو تو

$$\text{ی} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{۲\,\text{لاَ}} = \frac{۲\,\text{لاَ یَ}}{\text{لاَ}} = ۲\,\text{یَ}$$

اسواسطے حاصل ضرب حصص درمیانی کا $= ۴\,\text{لاَ یَ} = \text{ط}^2 + \text{ص}^2$

بعید البضوی کے کسی نقطہ سے مماس نکالا جاے اور اس مماس اور خطوط ممتنع الملاقات کی درمیان جو مثلث پیدا ہوگا اوسکا رقبہ برابر ہوگا حاصل ضرب حصص درمیانی اور نصف جیب زاویہ درمیانی کے

$$= \frac{1}{2}\left(\text{ط}^2 + \text{ص}^2\right) \text{جب } ۲\text{ھ} = \left(\text{ط}^2 + \text{ص}^2\right) \text{جب ھ جتا ھ} = \text{ط ص}$$

اور اسواسطے وہ مستقل ہے

چونکہ مماس (لاَ، یَ) محوروں لا اور ی کے حصص درمیانی ۲لاَ اور ۲یَ کو قطع کرتا ہے تو حصہ مماس کا جو درمیان خطوط ممتنع الملاقات کے آتا ہے نقطہ تماس پر تنصیف ہوتا ہے

# مساوات قطبیہ

(۲۶۴) مساوات قطبیہ بعید البیضوی کی دریافت کرو تاسکہ قطب ہے

فرض کرو کہ $\overline{ہ ع}$ = ں اور $\overline{اہ ع}$ = ر (شکل دفعہ ۲۰۹ دیکھو)

تو $\overline{ہ ع}$ = ی . $\overline{ع ن}$ موافق حدود کے

یعنی $\overline{ہ ع}$ = ی . (طہ + ہ م)

یا نق = ط (ی۲ − ۱) + ی نق جم (ک − ر) بموجب دفعہ (۲۲) کے

∴ نق (۱ + ی جم ر) = ط (ی۲ − ۱)

اور نق = $\frac{ط (ی۲ − ۱)}{۱ + ی جم ر}$ . . . . . . . (۱)

اگر ہم زاویہ لا ہ ع کو ر سے تعبیر کریں تو ہمکو جو پہلے حاصل ہوا تہا وہی حاصل ہوگا کہ

$\overline{ہ ع}$ = ی ($\overline{طہ}$ + $\overline{ہ م}$)

پس ں = ط (ی۲ − ۱) + ی ں جم ر

اور ں = $\frac{ط (ی۲ − ۱)}{۱ − ی جم ر}$ . . . . . . . (۲)

ہم دفعہ ۲۱۸ کی شکل سے اسطرح بہی اس مساوات کو دریافت کرسکتے ہیں کہ

فرض کرو کہ $\overline{ص ع}$ = ں = اور $\overline{ع ص ہ}$ = ر

تو $\overline{ص ع}$ = ی . ع نَ

یعنی ص ع = ی (ص م − ص یَ)

یا نق = (ی نق جم ر − ط (ی۲ − ۱)

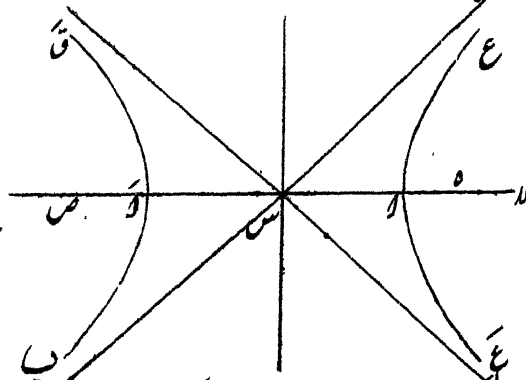
∴ نق (ی جم ر − ۱) = ط (ی۲ − ۱)

اور نق = $\frac{ط (ی۲ − ۱)}{ی جم ر − ۱}$

(۲۶۵) ان قطبی مساواتوں سے بعید البیضوی کی شبیہ کو مرتسم کرنا طالب علموں کے واسطے ایک اچہا شغل ہے

تمثیلاً مساوات (۱) میں فرض کرو کہ ر = ۰ تو نق = ط (ی۲ − ۱) اب ہمکو چاہئی کہ تقاطع

ابتدائی پر طول برابر ط (ی۲ − ۱) کے قطب ہ سے ناپ لیں تو اوسے نقطہ ل دریافت ہوجائیگا

اور وہ ایک نقطہ خط منحنی کا ہوگا

جیسے کہ ہ صفر سی ک۲ تک بڑہتی ہے تو ہم مساوات (۱) میں دیکھتے ہیں کہ ق بڑہتا ہی اور جب ر زیادہ ک۲ سے ہوتا ہے تو جم ر منفی ہوتا ہی اور ق برابر بڑہتا جاتا ہی

فرض کرو کہ ھ ایسا زاویہ ہو کہ ۱ + ی جم ھ = ۰ یعنی جم ھ = − ۱/ی تو جتنا ر قریب قریب ھ کے پہونچتا ہی اوتنا ہی ق بڑہتا ہی اور ر کو ھ کے قریب قریب فرض کرنے سے ہم ق کو جتنا چاہیں بڑہا سکتے ہیں پس جب ر صفر سے ھ تک بڑہتا ہے تو خط منحنی کا وہ حصہ مرتسم ہوتا ہے جو ا سے شروع ہوتا ہے اور نقطہ ع میں گذرتا ہی اور نقطہ ع غیر متناہی فاصلہ پر سید ہ سے گذرتا ہی

جبکہ ر بڑا ھ سے ہو تو ق منفی ہوتا ہے اور ابتدا میں وہ لانہایت بڑا ہوتا ہی اور وہ گہٹتا جاتا ہی جبکہ ر بڑا ھ سے ک تک ہوتا ہی - چونکہ ق منفی ہی تو ہم اوسکو مثبت سمت کی مقابل سمت میں پیمائش کر سکتے ہیں اور جبکہ ر زیادہ ھ سے ک تک ہوتا ہی تو اوسی خط منحنی وہ حصہ مرتسم ہوتا ہی جو ایک لا انتہا فاصلہ پر نقطہ س شروع دائیں ہاتہ کی طرف نیچے کے ربعہ میں شروع ہوتا ہی اور ق سے اَ تک گذرتا ہی - مساوات (۱) میں ر = ک کے فرض کریں تو س اَ دریافت ہو سکتا ہی اور اس صورت میں ق کی قیمت یہہ ہو جاتی ہی کہ − ط (ی + ۱) اسیواسطے س اَ طول میں = ط (ی + ۱)

چونکہ ر زیادہ ہوتا ہی ک سے ۲ک − ھ تک تو ق منفی ہوتا ہی اور با عتبار تعداد کی زیادہ ہوتا ہے اور ر قریب قریب ۲ک − ھ کے فرض کرکے ہم ق کو جتنا چاہیں بڑہا سکتے ہیں - پس اسطرح خط منحنی کے وہ فرع مرتسم ہوگی جو اَ سے شروع ہوتی ہے اور قَ پر لا انتہا فاصلہ پر گذرتی ہی

ہوتا ہی جب زیادہ ہو تو اب بن چنگ رکی بن جاتی ہو تا ہی اور اول لا انتہا بڑا ہوتا ہے
اور پھر کم ہوتا جاتا ہی اسطرح خط منحنی کا وہ حصہ مرتسم ہوتا ہی کہ نقطہ س سے لا انتہا فاصلے
شروع ہوتا ہے اور ا د کی بائین طرف نیچے کے حصہ مین واقع ہی اور ع اور ا پر گذرتا ہی
خطوط ممتنع الملاقات س ک اور س ک محور متقاطع پر اوس زاویہ پر سیل کہتے ہین کہ جسکا ماس
$\frac{ص}{ط}$ ہے اسے معلوم ہوا کہ جم ل س ا = $\frac{ط}{(ط^2+ص^2)}$ = ای اور جم ل س ا = - ای یعنی
ل س ا = ھ پس اسطرح جب ر قریب قیمت ھ کے ہوتا ہی تو نصف قطر دائر اوس مقام
قریب ہوتا ہی جو متوازی س ل کا ہی - اور علی ہذا القیاس جب ر قریب قیمت ۲ک - ھ
پہونچتا ہی تو نصف قطر دائرہ اوس مقام کے نزدیک ہوتا ہی جو متوازی س ل کا ہی

(۲۶۶) جس طرح دفعہ ۲۰۵ مین ثابت ہوا ہی یہان بھی ثابت ہو سکتا ہی کہ قطبی مساوات کسی تر
کی جسکے محاذی زاویہ ۲ ب ماسکہ پر واقع ہو یہہ ہی کہ نق = $\frac{ل}{ی جم ر + و طا ب جم (ھ - ر)}$
ھ - ب اور ھ + ب متحرک زاویے اون خطوں کے ہین جو ماسکہ اور وتر کے انجامون مین
ملائی جائین اور ل نصف عرض مستقیم ہی پس اسے ثابت ہوا کہ مساوات قطبی مماس کی یہہ ہے کہ

$$نق = \frac{ل}{ی جم ر + جم (ھ - ر)}$$

(۲۶۷) جب مرکز بعید البضوی کا قطب ہو تو اوسکی مساوات بموجب دفعہ ۲۰۶ کے یہہ ہی کہ

$$نق^2 (ط^2 جب^2 ر - ص^2 جم^2 ر) = - ط^2 ص^2$$

دفعات ۲۰۷ اور ۲۰۸ بعید البضوی کی حق مین بھی درست ہین

## متساوی الاضلاع یا قائم الزاویہ بعید البضوی

(۲۶۸) اگر بیضوی کی اس مساوات $ط^2 ی^2 + ص^2 لا^2 = ط^2 ص^2$ مین ہم فرض کرین کہ ط = ص تو
ہمکو یہہ حاصل ہو گا کہ $ی^2 + لا^2 = ط^2$ اور یہہ مساوات دائرہ کی ہی پس دائرہ کو ایک خاص صورت کا
بیضوی خیال کر سکتے ہین اگر بعید البضوی کی اس مساوات $ط^2 ی^2 - ص^2 لا^2 = - ط^2 ص^2$ مین ہم

فرض کریں کہ ط = ص تو ہم کو یہ حاصل ہوگا کہ $ی^2 - لا^2 = - ط^2$ اس سے ایک بعید البضوی حاصل ہوگی جسکو متساوی الاضلاع بہ نسبت محوروں کے مساوی ہونے کے کہتے ہین — اور چونکہ ص = ط کے ہونے سے زاویہ درمیانی خطوط ممتنع الملاقات کا جو = ۲ مس$^{-1}$ $\frac{ص}{ط}$ ہے زاویہ قائمہ ہوتا ہی اسلیے متساوی الاضلاع بعید البضوی کو قائم الزاویہ بعید البضوی بھی کہتے ہین

قائم الزاویہ بعید البضوی کی ذات کی ساتھہ جو باتین مخصوص ہین وہ معمولی بعید البضوی مین ط = ص کے فرض کرنے سے استنباط ہو سکتی ہین مثال اوسکی ذیل مین موجود ہی

چونکہ $ص^2 = ط^2 (ی^2 - ۱)$ سے ہمکو حاصل ہوتا ہے کہ $ی^2 - ۱ = ۱$ ∴ $ی = \sqrt{۲}$

مساوات مماس کی دفعہ ۲۲۰ مین

$$ی ی' - لا لا' = - ط^2$$

دفعہ ۲۲۷ سے $ع ح = ع ح' = \frac{ط^2}{ہاس لو}$

موجب دفعہ ۲۴۲ کے مساوات بعید البضوی مزدوج کی

$$ی^2 - لا^2 = ط^2$$

اسے معلوم ہوا کہ بعید البضوی مزدوج کی وہی کیفیت ہی جو اصلی بعید البضوی کی ہی گو وہ مختلف قوس پر واقع ہو موجب دفعہ ۲۴۸ کے س ع = س د اور اسیواسطے موجب دفعہ ۲۵۹ کی س ع اور س د یکسان میلان خطوط ممتنع الملاقات سے رکھتی ہین

## مثالین

(۱) دائرہ جو بعید البضوی کو اور ممتنع الملاقات کو مس کرتا ہی اوسکا نصف قطر برابر ہوتا ہے عرض مستقیم کے اوس حصہ کے جو درمیان خط منحنی اور ممتنع الملاقات کے واقع ہی

(۲) بعید البضوی کی دو راسون مین سے کسی راس سے ایک خط کہیچا جاے اور وہ اون دو خطون پر ختم ہو جو دوسری راس سے متوازی خطوط ممتنع الملاقات کے کہیچے جائین تو وہ خط اوس نقطہ پر تنصیف ہوگا جہان وہ بعید البضوی سی قطع ہوتا ہی

(۳) اگر بعید البضوی کے کسی ماسکہ سے ایک خط مستقیم کہیچا جاے تو حصہ جو مابین خط منحنی اور ممتنع الملاقات کے واقع ہو برابر ہوگا $\frac{ط ح حم}{ح حم + ح ا ر}$ جسمین ر اور وہ رادئی ہین جو وہ خط مستقیم اور ممتنع الملاقات

محور کے ساتھہ بناتے ہیں

(۴) دائرہ کے قطر اب پر جتنے وتر ایک ہی زاویہ پر میل رکھتے ہیں انمیں سے ایک وتر ع ق ہے
ا ع اور ب ق کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۵) بعید البضوی کے ایک فرع میں نقطہ ع ہے اور عَ ایک نقطہ بعید البضوی مزدوج کی اوپر ہے
س ع اور س عَ نصف اقطار مزدوج ہیں - اگر ص اور صَ ماسکہ اندرونی دونو فروع کے
ہوں تو ثابت کرو کہ ص ع اور صَ عَ کا تفاوت برابر ہوگا اس اور س ب کے تفاوت کی

(۶) اگر لا، د محددین بعید البضوی کے کسی نقطہ کی ہوں تو ثابت کرو کہ ہم یہہ فرض کر سکتے ہیں کہ

لا = ط قطا ر اور د = ص مس ر

(۷) بعید البضوی $\frac{لا^2}{ط^2} - \frac{د^2}{ص^2} = ا$ کے محور د کا متوازی خط کھیچا جاے اور وہ بعید البضوی سے اور
اوسکے مزدوج سے نقاط ع اور ق پر ملے تو ثابت کرو کہ دستور نقاط ع اور ق ایک دوسرے کو محور لا پر
تقاطع کرینگے اور یہہ بھی ثابت کرو کہ مماس نقاط ع اور ق کے خط منحنی پر تقاطع کرتی ہیں جسکی مساوات
یہہ ہی کہ $د^2 (ط^2 د^2 - ص^2 لا^2) = ۴ ص^6 لا^2$

(۸) بعید البضوی مزدوج کے ایک نقطہ سے اصل بعید البضوی کے مماس کھیچے گئے ہیں تو ثابت کرو کہ
وتر تماس دوسرے فرع بعید البضوی کو مس کریگا
مساواتیں نصف قطروں کی بھی دریافت کرو جو دونو مماسوں کے نقاط تماس کے مرکز بنانے سے بنیں اور
اگر یہہ نصف قطر عمود ایک دوسرے پر ہوں تو ثابت کرو کہ محددین نقطہ کے جسسے مماس کھیچے گئے ہیں
یہہ ہونگے $ط \sqrt{\frac{ص^2 - ۲ ط^2}{ط^2 + ص^2}}$ و $ص \sqrt{\frac{۲ ص^2 - ط^2}{ط^2 + ص^2}}$

(۹) قریب البضوی کے دو مماس نکالے ہیں اونکی درمیان کا زاویہ ھ ہے تو ثابت کرو کہ اونکے
نقاط تقاطع کا مقام النقاط بعید البضوی ہی جسکا ماسکہ اور خط منتظم وہی ہیں جو بعید البضوی کی ہے

(۱۰) بتاؤ باب دہم کے بیسویں مثال کہاں تک بعید البضوی کے باب میں ٹھیک ہے

(۱۱) قطر بعید البضوی کے جو زاویے خطوط ممتنع الملاقات سے بناتی ہیں اونکی جیبوں میں وہ
نسبت ہوتی ہے جو اون زاویوں کے جیبوں میں ہوتی ہے جو قطر مزدوج بناتے ہیں

(۱۲) بعضوی کے دو قطر مزدوج خطوط ممتنع الملاقات ایک زوج بعید البعضوی مزدوج کی نسبتے ہین تو ثابت کرو کہ اگر ایک بعید البعضوی بعضوی کو مس کرتی ہے تو دوسری بھی اوسکو مس کریگی اور یہہ بھی ثابت کرو کہ اقطار جو نقاط تماس سے کہیچے جائین مزدوج ایک دوسرے کے ہونگے

# باب سیزدہم

## کی مساوات عامّہ درجہ دوم

(۲۶۵) اب ہم ثابت کرینگے کہ ہر مقام النقاط جو مساوات درجہ دوم سے تعبیر ہوتا ہے وہ اونمین سے ایک ہوگا جنکا ذکر ہم نے ابتک کیا ہی یعنی ایک خط مستقیم یا دو خطوط مستقیم یا ایک دائرہ یا ایک قریب البعضوی یا ایک بعضوی یا ایک بعید البعضوی

مساوات درجہ دوم کی صورت عامہ اسطرح لکہی جاسکتی ہے

ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

ہم محورونکو قائم الزاویہ فرض کرتے ہین اور اگر محور منحرف ہون تو ہم اونکو قائم الزاویہ محورون کی طرف تحویل کرینگے اور چونکہ اس قسم کی تحویل سے مساوات کے درجہ مین بموجب دفعہ ۷۸ کے فرق نہین آتا اسلئے تحویل ہونیکے بعد بھی وہی صورت ہوگی جو اوپر مذکور ہوئی

اگر خط منحنی مبدء پر گذرتا ہی تو ف = ۰ اور اگر مبدء پر نہین گذرتا تو ف = ۰ کی نہین ہوتا اسلئے ف پر تقسیم کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ط َ لا^۲ + ص َ لا ی + س َ ی^۲ + د َ لا + ی َ ی + ۱ = ۰

(۲۷۰) اول ہم ثابت کرتے ہین کہ مساوات سے اون رقمون کا دور ہونا جنمین اول قوت مقادیر متغیر کی ملتف ہی ممکن ہے اصل محددین کو نقطہ (ح و ق) پر ان قیمتون کے مندرج کرنے سے تبدیل کرسکتی ہین کہ

لا = لا َ + ح اور ی = ی َ + ق

اور ان قیمتون کو لا اور ی کی جگہہ اس مساوات مین رکھو

ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

توہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ط لا َ^۲ + ص لا َ ی َ + س ی َ^۲ + (۲ ط ح + ص ق + د) لا َ + (۲ س ق + ص ح + ی) ی َ + ف َ = ۰ (۲)

جسمین ف َ = ط ح^۲ + ص ح ق + س ق^۲ + د ح + ی ق + ف (۳)

اب اگر ممکن ہو تو ح اور ق کی ایسی قیمتین فرض کرو جنسے کہ لا َ اور ی َ کی قیمتین فنا ہوجائین یعنی یہہ فرض کرین کہ ۲ ط ح + ص ق + د = ۰ اور ۲ س ق + ص ح + ی = ۰

پس $ح = \frac{۲س د - ص ی}{ص^۲ - ۴ط س}$ اور $ق = \frac{۲ط ی - ص د}{ص^۲ - ۴ط س}$

اسواسطے یہہ ممکن ہوگا کہ ح اور ق کی مناسب قیمتین مقرر کیجائین بشرطیکہ ص² − ۴ط س برابر صفر کے نہو
اب ہم یہہ لکھینگے کہ مقام الفقاط جو درجہ دوم کی مساوات عامہ سے تعبیر ہوتی ہین اونکی دو قسمین ہین
ایک وہ جو مرکز رکھتی ہین اور دوسری وہ جو مرکز نہین رکھتی پہلی صورت مین ص² − ۴ط س صفر نہین ہوگا
اور دوسری صورت مین ص² − ۴ط س صفر ہوگا - اب ہم اول وہ صورت لکھتے ہین جسمین ص² − ۴ط س
برابر صفر کے نہین ہے اور اسی سبب سے قیمتین ح اور ق جو اوپر دریافت ہوئی ہین محدود ہونگین اور
مساوات (۳) یہہ ہو جائیگی کہ

$$ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + ف = ۰ \qquad (۴)$$

اب اگر اس مساوات کی مقادیر متغیر کی لا اور ی قیمتون سے شرائط پوری ہوتی ہین تو − لا اور − ی
قیمتون سے شرائط پوری ہونگین اس سے معلوم ہوا کہ مبدء بعد بدلے محددین کا مرکز مقام الفقاط
کاہی جو (۱) سے تعبیر ہوتا ہی پس اس سے ثابت ہوا کہ اگر ص² − ۴ط س برابر صفر کے نہو تو مقام الفقاط
(۱) سے تعبیر کیا گیا ایک مرکز رکھتا ہی اور اوسکے محددین ح اور ق ہین جنکی قیمتین اوپر مذکور ہوئین
قیمت ف کی مساوات (۳) مین ح اور ق کی قیمتون کے رکھنے سے دریافت ہو جائیگی عمل
اسطرح آسان ہو سکتا ہی

$$۲ط ح + ص ق + د = ۰$$
$$۲س ق + ص ح + ی = ۰$$

ان مساواتون مین سے اول مساوات کو ح مین اور دوسری کو ق مین ضرب دو اور جمع کرو تو

$$۲ط ح^۲ + ۲س ق^۲ + ۲ص ح ق + د ح + ی ق = ۰$$
$$یا\ ۲ف - د ح - ی ق - ۲ف = ۰$$
$$\therefore ف = ف + \frac{د ح + ی ق}{۲}$$
$$= ف + \frac{س د^۲ + ط ی^۲ - ص ی د}{ص^۲ - ۴ط س}$$

ہم اختصار کے واسطے ف ہی لکھتے ہین

(۲۷) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۴) سے ہم زیر اٹھا کر اسطرح لکھ سکتے ہین کہ

$$ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + ف = ۰ \qquad (۵)$$

اس مساوات کو بموجب دفعہ ۱۸ کی محورون کی سمتین بدلکر زیادہ سادی صورت کا بنا سکتے ہین

$$\text{لا} = \text{لاَ}\ \text{جم ر} - \text{یَ}\ \text{جب ر}$$

$$\text{ی} = \text{لاَ}\ \text{جب ر} + \text{یَ}\ \text{جم ر}\quad \text{رکھو}$$

اور مساوات (۵) مین قیمت رکھنے سے

$$\text{لاَ}^{2}\left(\text{ط جم}^{2}\text{ر} + \text{س جب}^{2}\text{ر} + \text{ص جب ر جم ر}\right)$$

$$+\ \text{یَ}^{2}\left(\text{ط جب}^{2}\text{ر} + \text{س جم}^{2}\text{ر} - \text{ص جب ر جم ر}\right)$$

$$+\ \text{لاَ یَ}\ \left\{2(\text{س} - \text{ط})\ \text{جب ر جم ر} + \text{ص}\left(\text{جم}^{2}\text{ر} - \text{جب}^{2}\text{ر}\right)\right\} + \text{فَ} = 0 \quad (6)$$

اتسال لاَ یَ کے برابر صفر کے فرضکرو تو

$$2(\text{س} - \text{ط})\ \text{جب ر جم ر} + \text{ص}\left(\text{جم}^{2}\text{ر} - \text{جب}^{2}\text{ر}\right) = 0$$

$$\text{یا}\quad (\text{س} - \text{ط})\ \text{جب}\ 2\text{ر} + \text{ص جم}\ 2\text{ر} = 0$$

$$\therefore\ \text{مس}\ 2\text{ر} = \frac{\text{ص}}{\text{ط} - \text{س}} \quad \ldots\ldots (7)$$

چونکہ ر کی قیمت اسسے دریافت ہوسکتی ہے کہ مساوات (۷) کی شرائط کو پورا کرے تو رقم جسمین لاَ یَ ملتف ہو مساوات (۶) سے ہمیشہ ساقط ہوسکتی ہی اسلئے مساوات کی یہہ صورت ہوجائیگی کہ

$$\text{لاَ}^{2}\left(\text{ط جم}^{2}\text{ر} + \text{س جب}^{2}\text{ر} + \text{ص جب ر جم ر}\right)$$

$$+\ \text{یَ}^{2}\left(\text{ط جب}^{2}\text{ر} + \text{س جم}^{2}\text{ر} - \text{ص جب ر جم ر}\right) + \text{فَ} = 0$$

$$\text{یا}\quad \text{ا}\ \text{لاَ}^{2} + \text{ب}\ \text{یَ}^{2} + \text{فَ} = 0 \quad (8)$$

$$\text{جسمین}\quad \text{ا} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ط} + \text{س} + (\text{ط} - \text{س})\ \text{جم}\ 2\text{ر} + \text{ص جب}\ 2\text{ر}\right)$$

$$\text{ب} = \tfrac{1}{2}\left(\text{ط} + \text{س} - (\text{ط} - \text{س})\ \text{جم}\ 2\text{ر} - \text{ص جب}\ 2\text{ر}\right)$$

$$\text{چونکہ}\quad \text{مس}\ 2\text{ر} = \frac{\text{ص}}{\text{ط} - \text{س}}$$

$$\text{جم}\ 2\text{ر} = \frac{\text{ط} - \text{س}}{\sqrt{\text{ص}^{2} + (\text{ط} - \text{س})^{2}}}$$

$$\text{اور جب}\ 2\text{ر} = \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{ص}^{2} + (\text{ط} - \text{س})^{2}}}$$

$$\text{اسسے معلوم ہوا کہ}\quad \text{ا} = \tfrac{1}{2}\left[\text{ط} + \text{س} + \sqrt{\text{ص}^{2} + (\text{ط} - \text{س})^{2}}\right]$$

$$\text{ب} = \tfrac{1}{2}\left[\text{ط} + \text{س} - \sqrt{\text{ص}^{2} + (\text{ط} - \text{س})^{2}}\right]$$

مساوات (۸) بین مقادیر متغیر پر سے زیر اٹھا سکتے ہین اور اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$$-\frac{\text{ا}}{\text{فَ}}\ \text{لاَ}^{2} - \frac{\text{ب}}{\text{فَ}}\ \text{یَ}^{2} = 1$$

(۱) اگر ا اور ب اور فَ کی ایک ہی علامت ہو تو مقام التقاط اوسکا ناممکن ہے

(۲) اگر ا اور ب کی ایک ہی علامت ہو اور فَ کی علامت اوسکے خلاف ہو تو مقام التقاط بیضوی ہے جسکے نصف محور یہہ ہین

$$\sqrt{-\frac{\text{فَ}}{\text{ا}}}\ \text{اور}\ \sqrt{-\frac{\text{فَ}}{\text{ب}}}\quad \text{بموجب دفعہ ۱۶۰ کے}$$

کے مقام پر ہوگا اور دوسری صورت مین اسکا بالعکس یا مثبت اور منفی سمتین محوروں کی تبدیل ہو جائینگی
دفعہ ۲۷۱ مین جم ۲ر اور جب ۲ر کی جذر کی علامت ہر ایک ہو سکتی ہے لیکن علامت دونون مین
ایک ہونی چاہئے تاکہ یہہ آرتباط ص ۲ر = $\frac{ص}{ط-س}$ درست رہے

(۲۷۴) دفعہ ۲۷۱ کی ابتدا مین ہم جو لکھہ آئی ہین اوسکے موافق زاویہ ر پر محوروں کے پلٹنے سی مساوات ہو جاتی
$$ط لا^2 + ص لا ی + س ی^2 + ف = ۰$$
$$طَ لاَ^2 + صَ لاَ یَ + سَ یَ^2 + ف = ۰$$
جسمین $طَ = \frac{1}{2} [ (ط + س + (ط - س) جم ۲ر + ص جب ۲ر ]$
$$صَ = (س - ط) جب ۲ر + ص جم ۲ر$$
$$سَ = \frac{1}{2} (ط + س - (ط - س) جم ۲ر - ص جب ۲ر)$$
اسسے معلوم ہوا کہ $طَ + سَ = ط + س$ اور
$$صَ^2 - ۴ طَ سَ = [(س - ط) جب ۲ر + ص جم ۲ر]^2$$
$$- (ط + س)^2 + \{(ط - س) جم ۲ر + ص جب ۲ر\}^2$$
$$= (ط - س)^2 + ص^2 - (ط + س)^2$$
$$= ص^2 - ۴ ط س$$
اسسے معلوم ہوا کہ جملہ $ص^2 - ۴ ط س$ کی وہی قیمت ہی خواہ تو وہ مساوات عام درجہ دوم کی اشکال سے
پہلے نے یا پیچھے نے جب محور بدل گئے ہین
اور یہی کیفیت $ط + س$ کی ہے
اسسے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ اگر خط منحنی تعبیر کیا گیا مساوات
$ط لا^2 + ص لا ی + س ی^2 + و لا + ی ی + ف = ۰$ سے ایک قائم الزاویہ لعید البیضوی ہو
$ط + س = ۰$ اسواسطے کہ اگر خط منحنی کے محور قطر متقاطع اور مرکز مبدء متقرر کئے جائین
توبھی یہی ارتباط رہیگا اسلئے جو کچھہ ہم نے اوپر بیان کیا وہ سب صورتون پر حاوی ہی خواہ محور کچھہ ہی ہون

(۲۷۵) اب ہم دوسری صورت پر متوجہ ہوتی ہین جسمین
$$ص^2 - ۴ ط س = ۰$$
اب ہم دفعہ ۲۷۰ کی طرح اون ارقام کو جنمین مقادیر متغیر کی اول قوت ملتف ہون ساقط
نہین کرسکتے لیکن ہم محوروں کی سمت بدل کر مساوات کو دفعہ ۲۷۱ مین سادہ بنا سکتے ہین
فرض کرو کہ مساوات
$$ط لا^2 + ص لا ی + س ی^2 + د لا + ی ی + ف = ۰ \quad (۱) \text{ مین}$$

لا = لاَ جم ر − یَ جب ر

ی = لاَ جب ر + یَ جم ر

رکھو تو یہہ حاصل ہوگا کہ لاَ^۲ (ط جم^۲ ر + س جب^۲ ر + ص جب ر جم ر)

+ یَ^۲ (ط جب^۲ ر + س جم^۲ ر − ص جب ر جم ر)

+ لاَ (د جم ی + ی جب ر) + یَ (ی جم ر − د جب ر) + ف = ۰ (۲)

اب فرض کرو کہ جب ۲ ر = ص / (ط − س)

تو مساوات (۲) میں امثال لاَ یَ کی فنا ہوتی ہین اور موافق دفعہ ۱۷۲ کے امثال لاَ^۲ اور یَ^۲ کی یہہ ہین گے

½ [ط + س ± √{(ط − س)^۲ + ص^۲}]

ان امثالون مین ایک کا ضرور فنا ہونا چاہیئے کیونکہ اونکا حاصل ضرب ۴ ط س − ص^۲ ہے بموجب فرض کے = ۰ کے

فرض کرو کہ امثال لاَ^۲ = ۰ مساوات (۲) مین مقادیر متغیر پر سے زبر کو اڑا کر

س ی^۲ + د لا + ی ی + ف = ۰ (۳) لکہہ سکتے ہین

اگر د = ۰ کے نہ ہو تو وہ اسطرح بہی لکہی جاتی ہے

س (ی + ی/۲س)^۲ = − د (لا − ی^۲/(۴ س د) + ف/د)

پس بموجب دفعہ ۲۱۵ کے مقام النقاط قریب البضوی ہے

اگر د = ۰ تو مساوات (۳) دو خطوط مستقیم متوازیہ کو تعبیر کریگی

اگر ی^۲ بڑا ہے ۴ س ف سے ہی یا ایک خط مستقیم کو اگر ی^۲ برابر ہے ۴ س ف کے ہی

یا ایک ناممکن مقام النقاط ہوگا اگر ی^۲ چہوٹا ہے ۴ س ف سے ہی

اسے ثابت ہوا کہ جب ص^۲ − ۴ ط س = ۰ تو مساوات

ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

قریب البضوی کو تعبیر کرتی ہی لیکن اوسمین تین صورتین مستثنی ہین ایک وہ جسمین وہ خطوط متوازیہ کو تعبیر کرتی ہے یا ایک خط مستقیم کو یا ایک ناممکن مقام النقاط کو

دفعہ ۲۷۳ مین جو نتائج بیان ہوئے ہین اونکو اور اس نتیجہ کو ملا کر دیکہین تو یہہ معلوم ہوگا کہ مساوات عام درجہ دوم کا بیان تمام و کمال ہوگیا

(۲۷۶) دفعہ ۲۷۰ مین ہمنے ثابت کیا ہی کہ جب ص^۲ − ۴ ط س = ۰ کی نہین ہی تو مساوات عام درجہ دوم کی ایک مرکزی خط منحنی کو تعبیر کرتی ہی اب ہم ثابت کرینگے کہ جب ص^۲ − ۴ ط س = ۰ کے ہو تو خط منحنی کا مرکز نہین ہوگا الا اوس صورت مین کہ وہ دو خطوط مستقیم متوازیہ کو تعبیر کریگی

اگر ایک خط منحنی درجہ دوم کا مبدء محددین مرکز ہوسکا ہو تو کوئی رقم جسمین اول قوت کسی مقادیر متغیر کی ملتف ہو مساوات مین نہین رہ سکتی اسواسطے کہ اگر یہہ ممکن ہو تو فرض کرو کہ مبدء محددین کا مرکز اس خط منحنی کا ہی کیو

(۱) ط لا۲ + ص لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

اب فرض کرو کہ لا۱ اور ی۱ محددین کسی نقطہ خط منحنی کے ہین اسیواسطے − لا۱ اور − ی۱ دوسرے نقطہ خط منحنی کے محددین ہونگے ان قیمتون کو مساوات (۱) مین رکھو تو

ط لا۱۲ + ص لا۱ ی۱ + س ی۱۲ + د لا۱ + ی ی۱ + ف = ۰

ط لا۱۲ + ص لا۱ ی۱ + س ی۱۲ − د لا۱ − ی ی۱ + ف = ۰

اسیواسطے تفریق کرنے سے ۲ (د لا۱ + ی ی۱) = ۰ (۲)

اب اگر د اور ی دونو فنا نہون تو مساوات (۲) جب درست ہوگی کہ لا۱ اور ی۱ اس خط پر واقع ہون جسکی مساوات یہہ ہے کہ د لا۱ + ی ی۱ = ۰

لیکن مرکز خط منحنی کا وہ نقطہ ہی جو ہر وتر کی کہ اوسمین گذرتا ہی تنصیف کرتا ہی اسسے معلوم ہوا کہ مبدء محددین کا مرکز خط منحنی (۱) کا نہین ہوسکتا جب تک کہ د اور ی فنا نہوتی ہون

(۲۷۷) فرض کرو کہ یہہ مساوات ہے

(۱) ط لا۲ + ص لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

جسمین ص۲ − ۴ ط س = ۰ یہان ط اور س دونو صفر نہین ہوسکتے اسواسطے کہ جب یہہ برابر صفر کے ہونگے تو ص بھی صفر ہو جائیگا تو مساوات (۱) درجہ دوم کی نہین رہیگی ہم فرض کرینگے کہ ط برابر صفر کی نہین ہے

اب اگر خط مساوات (۱) سے تعبیر کیا گیا مرکز رکھتا ہو اور اوس مرکز کو مبدء محددین فرض کرین تو ارقام جسمین اول قوت لا اور ی کی ملتف ہے بموجب دفعہ ۲۷۶ کے فنا ہو جائینگی − لیکن دفعات ۲۷۰ اور ۲۷۴ سے یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ ص۲ − ۴ ط س = ۰ اگر ہم ان رقمون کو مبدء یا محورونکو بدل کر فنا نہین کر سکتی − صرف ایک صورت مستثنی ہی جسمین دفعہ ۲۷۰ مین ح اور ق کی قیمتون مین شمار کنندہ فنا ہو جاتا ہی اوسوقت قیمتین ح اور ق کے غیر متعین ہو جاتی ہین اور دو مساواتین جو اونکی قیمتون کی دریافت کرنیکے واسطے تہین وہ ایک ہو جاتی ہین جبر و مقابلہ کی باب یازدہم کو دیکھو پس ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

$۲$ طای - ص د = بس می = $\frac{ص ی}{۲ ط}$ پس اسسے ثابت ہوا کہ س اور ی کی

جگہہ قیمتین کے رکہنے سے مساوات (۱) یہہ ہوجائیگی کہ

$$ط لا^۲ + ص لا ی + \frac{ص^۲ ی^۲}{۴ ط} + د لا + \frac{ص د}{۲ ط} ی + ف = ۰$$

یعنی $ط \left(لا + \frac{ص ی}{۲ ط}\right)^۲ + د \left(لا + \frac{ص ی}{۲ ط}\right) + ف = ۰$ (۲)

مساوات (۲) سے دو قیمتین $لا + \frac{ص ی}{۲ ط}$ کی دریافت ہونگیں پس اگر یہہ قیمتین ممکن ہین تو مین

تمام النقاط دو خطوط متوازیہ ہونگی۔ اس صورت مین ہر نقطہ اوس خط مین کہ ان خطوط متوازیہ مین

کسی ایک خط کا متوازی ہو ٹہیک وسط مین واقع ہو وہ اوسکا مرکز ہوگا

دفعہ ۲۷۶ کی ابتدا مین جو نتیجہ بیان کیا گیا ہے وہ ثابت ہی

(۲۷۸) دفعہ ۲۷۴ مین جو ارتباطات بیان ہوئے ہین اونکی متشابہ ارتباطات حاصل ہوسکتی ہین

اگر محور محدین کے محرف ہون اسواسطے کہ فرض کرو مساوات

$$ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + ف = ۰$$

بلحاظ قائم الزاویہ محوروں کے ہے اب فرض کرو کہ یہہ محور بدل کر محرف محور بنجائین جنکے درمیان زاویہ د ہے

اور ایک اور بات یہہ زیادہ فرض کرو کہ محور لا کا پرانے محور لا پر منطبق ہے تو بموجب دفعہ ۲۸ کی

$$لا = لاَ + یَ جم د \quad اور \quad ی = یَ جب د$$

ان قیمتونکو اوپر کی مساوات مین رکہین تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$طَ لاَ^۲ + صَ لاَ یَ + سَ یَ^۲ + فَ = ۰$ جسمین

$$طَ = ط$$

$$صَ = ۲ ط جم د + ص جب د$$

$$سَ = ط جم^۲ د + ص جب د جم د + س جب^۲ د$$

پس $صَ^۲ - ۴ طَ سَ = (ص^۲ - ۴ ط س) جب^۲ د$

اور $طَ + سَ - صَ جم د = (ط + س) جب^۲ د$

پس $\frac{صَ^۲ - ۴ طَ سَ}{جب^۲ د} = ص^۲ - ۴ ط س$

اور $\frac{طَ + سَ - صَ جم د}{جب^۲ د} = ط + س$

پس دفعہ ۲۷۴ کی استخراجات سی ثابت کرسکتے ہین کہ خواہ محور قائم الزاویہ ہون خواہ غیر قائم الزاویہ

ان جملون $\frac{صَ^۲ - ۴ طَ سَ}{جب^۲ د}$ اور $\frac{طَ + سَ - صَ جم د}{جب^۲ د}$

مین کچھہ تبدل نہین ہوتا گو محور بدل جائین

(۷۹) اب ہم لکھتے ہین کہ مساوات درجۂ دوم سے کس طرح خط منحنی کا بغیر محددین کی صورت بدلنے کے مرتسم کر سکتے ہین اور محورون کو خواہ قائم الزاویہ فرض کرین خواہ غیر قائم الزاویہ — فرض کرو مساوات

$$\text{ط لا}^2 + \text{ص لا ی} + \text{س ی}^2 + \text{د لا} + \text{ی ی} + \text{ف} = ۰$$

مساوات کو بلحاظ ی کے حل کرو تو

$$\text{ی} = -\frac{\text{ص لا} + \text{ی}}{۲\,\text{س}} \pm \frac{1}{۲\,\text{س}}\left[(\text{ص لا} + \text{ی})^2 - ۴\,\text{س}\,(\text{ط لا}^2 + \text{د لا} + \text{ف})\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{\text{ص لا} + \text{ی}}{۲\,\text{س}} \pm \frac{1}{۲\,\text{س}}\left[(\text{ص}^2 - ۴\,\text{ط س})\,\text{لا}^2 + ۲\,(\text{ص ی} - ۲\,\text{س د})\,\text{لا} + \text{ی}^2 - ۴\,\text{س ف}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \text{ھ لا} + \text{ب} \pm \left[\frac{\text{ص}^2 - ۴\,\text{ط س}}{۴\,\text{س}^2}\,(\text{لا}^2 + ۲\,\text{ع لا} + \text{ق})\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۳)$$

جسمین ھ $= -\frac{\text{ص}}{۲\,\text{س}}$ اور ب $= -\frac{\text{ی}}{۲\,\text{س}}$

$$\text{ع} = \frac{\text{ص ی} - ۲\,\text{س د}}{\text{ص}^2 - ۴\,\text{ط س}} \quad \text{اور ق} = \frac{\text{ی}^2 - ۴\,\text{س ف}}{\text{ص}^2 - ۴\,\text{ط س}}$$

**اول** فرض کرو کہ ص² − ۴ ط س منفی ہے اور اسمین بجاے $\frac{\text{ص}^2 - ۴\,\text{ط س}}{۴\,\text{س}^2}$ کے − لو رکھو تو مساوات (۳) کی یہہ صورت ہوگی کہ

$$\text{ی} = \text{ھ لا} + \text{ب} \pm \left\{-\text{لو}\,(\text{لا}^2 + ۲\,\text{ع لا} + \text{ق})\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{اب}\quad \text{لا}^2 + ۲\,\text{ع لا} + \text{ق} = (\text{لا} + \text{ع})^2 + \text{ق} - \text{ع}^2$$

پس اگر ق − ع² مثبت ہو تو مقدار علامت جذر کی اندر منفی ہوگی اور مقام النقاط ناممکن ہوگا

اگر ق − ع² = ۰ تو مقام النقاط ایک نقطہ ہوگا جو

لا = − ع اور ی = ھ لا + ب سے متعین ہوگا

اگر ق − ع² منفی ہو تو ہم یہہ رکھہ سکتے ہین کہ

$$(\text{لا} + \text{ع})^2 + \text{ق} - \text{ع}^2 = \left\{\text{لا} + \text{ع} + \sqrt{\text{ع}^2 - \text{ق}}\right\}\left\{\text{لا} + \text{ع} - \sqrt{\text{ع}^2 - \text{ق}}\right\}$$

$= (\text{لا} - \text{بر})\,(\text{لا} - \text{سر})$ فرض کرو

تو مساوات (۴) اسطرح لکھی جائیگی کہ

$$\text{ی} = \text{ھ لا} + \text{ب} \pm \left[-\text{لو}\,(\text{لا} - \text{بر})\,(\text{لا} - \text{سر})\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (۵)$$

چونکہ (لا − بر) (لا − سر) مثبت ہی الا اوس صورت مین کہ لا درمیان بر اور سر کے واقع ہو تو قیمتین ی کی مساوات (۵) مین اصلی ہونگین جب تک کہ لا درمیان بر اور سر کے واقع ہو — سوا ازین ی

بعلیشہ ی محدود دہی اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی مساوات (۵) سی تعبیر کیا گیا ہر سمت مین محدود سے
چونکہ ہم اپنی پہلی تحقیقات سی جانتے ہین کہ مساوات (۵) ضرور اون خطوط منحنی مین سے جو دفعہ
۲۶۹ مین شمار کی گئی ہین ایک کو ضرور تعبیر کریگا تو اسے یہہ نتیجہ نکلتا ہی کہ وہ ایک بیضوی کو تعبیر کریگا
مساوات (۵) کی صورت سی ہم دیکھتے ہین کہ وتر متوازی محور ی کی تنصیف اس خط سے ہوتی ہین کہ

$$\text{ی} = \text{ھہ}\ \text{لا} + \text{ب} \qquad (۶)$$

اسواسطے کہ فرض کرو کہ (۵) کے خط منحنی پر دو نقطے ہون جنکا محدد مشترک $\text{لا}_1$ ہو اور معین یَ اور یً ہون
اور $\text{ی}_1$ مطابق اسکے معین (۶) کا ہو تو

$$\text{ی}_1 = \text{ھہ}\ \text{لا}_1 + \text{ب}$$
$$\text{یَ} = \text{ھہ}\ \text{لا}_1 + \text{ب} + \left[-\text{و}\ (\text{لا}_1 - \text{بر})(\text{لا}_1 - \text{سر})\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{یً} = \text{ھہ}\ \text{لا}_1 + \text{ب} - \left[-\text{و}\ (\text{لا}_1 - \text{بر})(\text{لا}_1 - \text{سر})\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\text{پس}\ \text{ی}_1 = \frac{1}{2}\left(\text{یَ} + \text{یً}\right)$$

اور اسیواسطے نقطہ $(\text{لا}_1 \text{و} \text{ی}_1)$ عین وسط مین نقاط (لا۱ و یَ) اور (لا۱ و یً) کے ہین

شکل مین و س دَ تعبیر کرتا ہی خط ی = ھہ لا + ب کو اور محدد نقطہ دَا اور دَ کے بر اور
سر ہین فرض کرو کہ بر ا سر سے ہی۔ مرکز س عین وسط مین درمیان دَا اور دَ کے ہی تو اوسکا محدد
اسیواسطے $\frac{1}{2}$ (بر + سر) ہی ۔ مساوات خط منحنی سے معین نقاط دَا اور دَ اور حَ اور حً
کے معلوم ہونگے

چونکہ ح حَ متوازی اوتار کا ہی جنکو د دَ تنصیف کرتا ہے اور د دَ اور ح حَ اقطار مزدوج مین
ح حَ ایک مقدار معلوم ہے اسلئے کہ ح اور حَ معلوم ہین اور نیز د دَ بہی معلوم مقدار ہے اسلئے کہ
محدد اور معین نقاط د اور دَ کے معلوم ہین ـ تو زاویہ درمیانی ح حَ اور د دَ کے مساوات د دَ
معلوم ہو سکتے ہین تو دفعات (۱۹۳ اور ۱۹۵) سے محور بیضوی کے معلوم ہو سکتے ہین

**دوم** فرض کرو کہ صَ ـ ۴ ط س مثبت ہی لو کو بجای $\frac{صَ - ۴ ط س}{۴ س^۲}$ کے لکہو تو مساوات
(۳) یہہ ہو جائیگی [ی = ھ لا + ب ± [لو (لا^۲ + ۲ع لا + ق)]^½] ——— (۷)

اب لا^۲ + ۲ع لا + ق = (لا + ع)^۲ + ق ـ ع^۲

پس اگر ق ـ ع^۲ مثبت ہو تو مقدار جذر کی اندر ہمیشہ مثبت ہوگی خواہ لا کی کچہہ ہی قیمت ہو
اسواسطے خط منحنی لا انتہا ہی پہیلتا ہی اور جس طرح پہلے ثابت ہوا ہی یہان بہی ثابت ہوتا ہی
ایک قطر خط منحنی کا ہی لیکن وہ کبہی خط منحنی ی = ھ لا + ب سے نہین ملتا کیونکہ مقدار لا^۲ + ۲ع لا + ق یا
(لا + ع)^۲ + ق ـ ع^۲ کی فنا نہین ہوتی ـ اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی کی دو شاخین ہین
جو آپسمین کسیطرح نہین ملتین اور غیر متناہی پہیلتی ہین اور اسیواسطے وہ ایک بعید البیضوی ہے

اگر ق ـ ع^۲ = ۰ تو (۷) یہہ ہو جائیگے

ی = ھ لا + ب ± ۱/لو (لا + ع)

تو مقام النقاط دو خطوط مستقیم متقاطع ہونگے

اگر ق ـ ع^۲ منفی ہو تو ہم پہلے طرح (۷) کو اس صورت مین لکہہ سکتی ہین کہ
ی = ھ لا + ب ± [لو (لا ـ بر) (لا ـ سر)]^½

اسے معلوم ہوا کہ لا کی ہر ایک قیمت ہو سکتی ہی مثبت ہو یا منفی الا وہ قیمتین جو بر اور سر کے درمیان واقع ہون
اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی مین دو فرع ہین جو لا انتہا پہیلتی ہین اور آپسمین ملتی نہین اسلئے وہ بعید البیضوی ہے
اس صورت کی ہم ایک مثال لکہتے ہین خطوط ممتنع الملاقات کے مقام دریافت کرنے مین ہماری یہی ابتدائی
مساوات خط منحنی کی یہہ ہے کہ

ی = ھ لا + ب ± [لو (لا^۲ + ۲ع لا + ق)]^½

∴ ی = ھ لا + ب ∓ لا لو^½ (۱ + ۲ع/لا + ق/لا^۲)^½

اسکو ضابطہ ثنائی کے موافق پہیلاؤ تو

ی = ھ لا + ب + لا ہ تو [ ۱ + ۱/۲ ( ی/لا + ق/لا ) + وغیرہ ]

= ھ لا + ب ± ہ تو ( لا + ع ) + وغیرہ

اور ص اور رقمیں ہیں اونمیں لا کی منفی قوتیں ہیں اور سو اسطے وہ لا کی ترقی بڑہانے سے اسقدر کم ہوسکتی ہیں جسقدر چاہیں

اسسے معلوم ہوا کہ موافق خاصیت ممتنع الملاقات کے مساوات مطلوب خطوط ممتنع الملاقات کی یہہ ہوگی کہ

ی = ھ لد + ب + ہ تو ( لد + ع )

ی = ھ لد + ب + ہ تو ( لد + ع )

اسسے معلوم ہوا کہ خطوط ممتنع الملاقات ہم کہنچ سکتے ہیں اور اسیواسطے محوروں کو بنا سکتے ہیں کیونکہ وہ خطوط ممتنع الملاقات کے زاویہ درمیانی کی تنصیف کرتے ہیں اور نقطہ تقاطع خطوط ممتنع الملاقات کا مرکز ہے اسسے مقام اور شبیہ لعید البضوی کی معلوم ہوجائیگی

جہاں ق - ع² = ( ی² - ۴ س ف ) ( ص² - ۴ ط س ) - ( ص ی - ۲ س د )² / ( ص² - ۴ ط س )²

فنا ہوتا ہے جبکہ

( ی² - ۴ س ف ) ( ص² - ۴ ط س ) - ( ص ی - ۲ س د )² = ۰

اور اسیواسطے جب

( ص² - ۴ ط س ) ف + ۱ ی² + س د² - ص ی د = ۰

اگر یہہ ارتباط مستحکم اور قطعی ہو تو مقام النقاط دو خطوط مستقیم متقاطع ہونگے

ابتک ہم نے یہہ فرض کیا ہی کہ س صفر نہیں ہی اور چونکہ ص² - ۴ ط س کسیطرح س کے صفر ہونے سے منفی نہیں ہوسکتا تہا اسلئے صورت اول میں تو س کے صفر ہونیکا بیان کرنا کچہہ ضرور نتہا مگر جب ص² - ۴ ط س مثبت ہو تو اسمیں س کا صفر ہونا ممکن ہے اسلئے اب ہم اون نتایج کا بیان کرتے ہیں جو س کے صفر ہونے سے پیدا ہوتے ہیں

مساوات ( ۱ ) جیسے بلحاظ لا کی حل ہوئی تہی اوسیطرح بلحاظ ی کے حل ہوسکتی ہی اسسے بعد تحقیقات کرنیکے یہہ دریافت ہوگا کہ ابتک جو نتایج ص² - ۴ ط س کے مثبت فرض کرنے سے دریافت ہوئی تہی وہ سب صحیح اور درست ہیں بشرطیکہ ط اور س دونو صفر نہوں اب یہہ اخر صورت اور زیادہ امتحان کی محتاج ہی فرض کرو کہ ط = ۰ اور س = ۰ تو مساوات ( ۱ ) یہہ ہوجائیگی کہ

ص لا ی + د لا + ی ی + ف = ۰

مبدا کو تبدیل کرنے سے اس مساوات کو اس صورت میں رکہہ سکتے ہیں

ص لا ی + ف = ۰

اسمین ف = (ص ف − دی)/ص

اسواسطے خط منحنی بعید البضوی ہی اور اوسکے محور جدید خطوط ممتنع الملاقات ہین مگر صورت ص ف − دی = ۰ مستثنی ہے اس صورت مین وہ دو خطوط مستقیم متقاطع ہین جب کہ ط = ۰ اور س = ۰ تو جملہ

(ص۲ − ۴ ط س) + ط ی۲ + س د۲ − ص ی د

مختصر ہو کر یہہ ہو جائیگا کہ ص (ص ف − دی) پس یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ جب ص۲ − ۴ ط س مثبت ہو تو مساوات (۱) ہمیشہ بعید البضوی کو تعبیر کرتی ہے مگر جب

(ص۲ − ۴ ط س) ف + ط ص۲ + س د۲ − ص ی د = ۰

کی ہو تو یہہ صورت مستثنی ہو جاتی ہے اور پہر وہ مساوات دو خطوط مستقیم متقاطع کو تعبیر کرتی ہے

**سوم** فرض کرو کہ ص۲ − ۴ ط س = ۰ تو (۲) کی یہہ صورت ہو جائیگی

ی = − (ص لا + ی)/۲ س ± ۱/۲ س [(ص ی − ۲ س د) لا + ی۲ − ۴ س ف]^(۱/۲)

اور اسکو ہم اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ ی = ھہ لا + ب ± ۱/۲ س (ع لا + ق)^(۱/۲)

اسمین ھہ = − ص/۲ س اور ب = − ی/۲ س

ع = ۲ (ص ی − ۲ س د) اور ق = ی۲ − ۴ س ف

اگر ع مثبت ہو تو علامت جذر کی اندر جملہ کی مثبت ہوگی اگر لا الجبرا کے موافق بڑا − ق/ع سی ہو اور وہ جملہ منفی ہوگا اگر لا چہوٹا − ق/ع سی ہو اگر ع منفی ہو تو جو کچہہ اوپر بیان ہوا ہے اوسکو معکوس سمجہہ لو دونو صورتون مین خط منحنی صرف ایک سمت مین غیر متناہی پہیلتا ہی اور اسیواسطے وہ قریب البضوی ہے خط ی = ھہ لا + ب ایک قطر ہے اور تمام معینون کو جو متوازی محور ی کے ہون تنصیف کرتا ہے اور قریب البضوی سے اوس نقطہ پر ملتا ہے جسکے واسطے لا = − ق/ع

اگر ع = ۰ تو مساوات یہہ ہو جائیگی

ی = ھہ لا + ب ± (ق)^(۱/۲)/۲ س

پس اگر ق مثبت ہو تو یہہ مساوات دو خطوط مستقیم متوازیہ کو تعبیر کریگی اور اگر ق = ۰ تو ایک خط مستقیم کو تعبیر کریگی اور اگر ق منفی ہے تو مقام النقاط ناممکن ہے ہمنے تیسری صورت مین ابتک یہہ فرض کیا ہے کہ س صفر نہین ہے اگر س = ۰ تو ص = ۰ کیونکہ ص۲ − ۴ ط س = ۰

اس سے معلوم ہوا کہ ط اور س دونو صفر نہین ہوسکتے
اسلیے کہ مساوات (۱) مساوات درجہ دوم کی فرض کی گئی ہے
اب ہم موافق سابق کے مساوات (۱) کو بلحاظ لا کی حل کرتے ہین اور پہر س = ۰ کے ہونے سے جو خاص باتین واقع ہون اونکی تحقیقات کرتے ہین مثلاً جب س کو صفر نہین فرض کیا ہے تو ہمکو معلوم ہوتا ہے کہ مقام النقاط مین دو خطوط مستقیم متوازی ہونگے جب

ص ی − ۲ س د = ۰ اور ی۲ − ۴ س ف مثبت ہو

اسیطرح اگر ط صفر نہو تو ہم ثابت کر سکتے ہین کہ مقام النقاط دو خطوط مستقیم متوازیہ ہونگے جب

ص د − ۲ ط ی = ۰ اور د۲ − ۴ ط ف = ۰ مثبت ہو

اس ارتباط ص۲ − ۴ ط س = ۰ کی وساطت سی اس بات کا ثابت کرنا آسان ہی کہ جب ط اور س دونو صفر سے مختلف ہون تو شرائط کی دوسری صورت شرائط کی اول صورت کے ساتہہ مطابق ہوتی ہے جب لا = ۰ تو ضرور ہی کہ دوسری صورت شرائط کی ہو اگرچہ پہلی صورت بہی شرائط کی اس حالت پر حاوی ہے
اسیطرح اون صورتون کی بہی تحقیقات ہوسکتی ہے کہ جنمین مقام النقاط ایک خط مستقیم ہو یا ناممکن ہو

(۲۸۰) مساوات

ط لا۲ + ص لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی + ف = ۰

کے مقام النقاط کے باب مین جو نتائج اوپر بیان ہوئی اونکو اب ہم دوبارہ لکہدیتے ہین

اول اگر ص۲ − ۴ ط س منفی ہو تو مقام النقاط بیضوی ہوگا اور اونمین یہہ اختلافات ہونگے

(۱) س = ط اور ص / ۲ط = محوروں کے زاویہ درمیانی کی جیب کے تو مقام النقاط دائرہ ہی دفعہ (۲۰۰)
(۲) (ی۲ − ۴ س ف) (ص۲ − ۴ ط س) − (ص ی − ۲ س د)۲ مثبت ہی تو مقام النقاط ناممکن ہی
(۳) (ی۲ − ۴ س ف) (ص۲ − ۴ ط س) − (ص ی − ۲ س د)۲ = ۰ تو مقام النقاط نقطہ ہی

دوم اگر ص۲ − ۴ ط س مثبت ہو تو مقام النقاط بعید البضوی ہے مگر جب

(ص۲ − ۴ ط س) ف + ط ی۲ + س د۲ − ص د ی = ۰

تو مقام النقاط دو خط مستقیم متوازیہ ہونگے

سوم اگر ص۲ − ۴ ط س = ۰ تو مقام النقاط قریب البضوی ہی الا یہہ صورت مستثنی ہے کہ ص ی − ۲ س د = ۰ اور ص د − ۲ ط ی = ۰ اس صورت مین مقام النقاط دو خطوط مستقیم

متوازیہ ہونگے اگر ی² - ۴ س ف اور د² - ۴ ط ف مثبت ہین اور ایک خط مستقیم ہوگا اگر ی² - ۴ س ف اور د² - ۴ ط ف صفر ہون اور مقام النقاط ناممکن ہوگا اگر یہہ دونو منفی ہون

## مثالین

(۱) مرکز منحنی س لا² - ۴ لا ی + ۴ ی² - ۲ ط لا + ۴ ط ی = ۰ کا دریافت کرو

(۲) بیضوی ص ی (۱ - س/ی) + س لا (۱ - ص/لا) = لا ی کا مرکز دریافت کرو

(۳) ط لا² + ۲ ص لا ی + س ی² = ۱ سے جب ص² = ط س کی ہو کیا تعبیر ہوتا ہی۔

(۴) ایک دائرہ معلوم قطاع مین دائرہ بنایا گیا ہی اسکے مرکز کا مقام النقاط دریافت کرو اور ثابت کرو کہ نصف قطر جو قطاع کو احاطہ کرتے ہین وہ قائم رہتے ہین

(۵) مثلث ا ب س کے ضلع ا ب مین نقطہ ع کا مقرر کیا گیا ہی اور ع ق عمود ا س پر نکالا گیا ہے تو خطوط مستقیم ب ق اور س ع کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۶) دی کوی وتر بیضوی کے محور اکبر ا ا' کا متوازی ہی اور اس بیضوی کا مرکز س ہی اور ا د اور س ی نقطہ ع پر تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ ع کا مقام النقاط بعید البضوی ہی اور اوسکے خطوط ممتنع الملاقات کی سمت دریافت کرو

(۷) دو بیضویان متحد المرکز ہین اور اونکی محورون کے سمتین منطبق ہوتی ہین اونکی مماس نقطہ ع سے کہیچے گئی ہین اور اونکو تماس نقطہ ق پر تقاطع کرتے ہین اگر نقطہ ع ہمیشہ ایک خط مستقیم ہی مین واقع ہو تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ق کا قائم الزاویہ بعید البضوی ہے

(۸) اوپر کی مثال مین کیا نتیجہ پیدا ہوگا اگر محور جو متحد السمت ہین مساوی ہی ہون

(۹) ثابت کرو کہ بعید البضوی اسطرح مرتسم ہو سکتی ہی کہ دو خطوط مستقیم متحرک ہون اور وہ ہمیشہ اپنے متوازی رہین اور نقطہ معین سے اونکی فاصلون کا حاصل ضرب ایک بالاستقلال مقدار معین کا ہو

(۱۰) بیضوی کے ماسکہ سے دو خطوط مستقیم کہیچے گئے ہین اور اونکا درمیانی زاویہ ہمیشہ ایک بالاستقلال مقدار رکہتا ہے اور جن نقطون پر یہہ خطوط بیضوی سے ملتے ہین اونسے مماس نکالے گئے ہین مماسون کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۱) اس قریب البضوی کا عرض مستقیم دریافت کرو

(ی - لا)² = ط لا

(۱۲) ثابت کرو کہ ئ۲ − ۴ لا ئ + ۵ لا۲ = ۲ کی نصف محوروں کا حاصل ضرب ۲ ہے
(۱۳) بعید البضوی لا ئ = ص لا۲ + س کے خطوط ممتنع الملاقات کا زاویہ درمیانی دریافت کرو
(۱۴) اوس قریب البضوی کی مساوات دریافت کرو جو محور لا کو مبداء کے فاصلہ پر مبداء سے مس کرتی ہے اور محور ئ کو مبداء سے ب اور ب' فاصلوں پر قطع کرتی ہے

(۱۵) دو قائم الزاویہ محوروں میں سے ہر ایک پر دو نقطے ایسے مقرر کئے گئے ہیں کہ اون سے یہہ شرط پوری ہوتی ہے کہ اون چاروں نقطوں پر قائم الزاویہ بعید البضوی گذر سکتی ہے تو ثابت کرو کہ مقام بعید البضوی کا غیر المعین ہے اور اوسکے مرکز سے ایک دائرہ مرتسم ہوتا ہے جو مبداء میں گذرتا ہی اور اون خطوں کی تنصیف کرتا ہی جو دو دو نقطوں میں ملائے جائیں

(۱۶) دو خط طول کے مساوی ایک دوسرے پر منطبق ہیں اور دو قائم محوروں پر سطح متحرک ہوتے ہیں کہ ایک دائرہ اونکے اطراف پر کہیچ سکتا ہی تو مقام انتقاط دائرہ کے مرکز کا دریافت کرو اور ثابت کرو کہ وہ متساوی الاضلاع بعید البضوی ہے

(۱۷) ایک بضوی متغیر ایک بضوی معلوم کو مس کرتی ہے اور اونکا ماسکہ مشترک ہی تو اوسکی ماسکہ دوم کا مقام انتقاط دریافت کرو (۱) جب کہ محور اکبر معلوم ہو
(۲) جبکہ محور اصغر معلوم ہو

(۱۸) خط منحنی کہینچو جسکی مساوات یہہ ہے

$$ئ^2 - لا ئ + ۲ لا^2 - ۴ لا + ۵ ئ + ۴ = ۰$$

(۱۹) خط منحنی کہینچو جسکی مساوات یہہ ہے

$$لا^2 + ئ^2 - ۳ (لا + ئ) - لا ئ = ۰$$

(۲۰) اس خط منحنی کا مقام اور خاصیت دریافت کرو جسکی مساوات

$$ئ^2 - ۸ لا ئ + ۲۵ لا^2 + ۶ س ئ - ۴۲ س لا + ۹ س^2 = ۰$$

(۲۱) مساوات تراشش مخروطی کی یہہ ہے

$$ط لا^2 + ۲ ص لا ئ + س ئ^2 = ۰$$

تو ثابت کرو کہ مساوات اوسکے محوروں کی یہہ ہے

$$لا ئ (ط - س) = ص (لا^2 - ئ^2)$$

(۲۲) اگر ایک قریب البضوی کے اوتار متوازیہ متشابہ مثلثوں کے قاعدے بنیں تو ان مثلثوں کے راسوں کا

کا مقام النقاط اکثر ایک اور قریب البیضوی ہوگی لیکن اگر کسی مثلث کے اضلاع قریب البیضوی کو مس کرین تو مقام النقاط ایک خط مستقیم ہوگا

(۲۳) ایک سلسلہ دائرون کا نقطہ معلوم ط پر گذرتا ہی اور اونکی مرکز پر ایک خط اط مین ہین اور ایک اور خط ب س سے ملتے ہین فرض کرو کہ م وہ نقطہ ہے جسپر دائرہ دوبارہ خط ط ا سے ملتا ہے اور ن کوئی نقطہ اون نقطون مین سے ہے جنپر یہہ دائرہ ب س سے ملتا ہے اور م اور ن سے خطوط متوازی ب س اور ء ا کے جدا گانہ کھیچے گئے ہین اور نقطہ ع پر وہ تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط ع کا بعید البیضوی ہے اور جب یہہ دو خط متقاطع علی القوائم ہون تو مقام النقاط قریب البیضوی ہوگا

(۲۴) ایک قریب البیضوی کے دو مماسون کے وتر تماس کے محاذی راس پر زاویہ ب ا ہی تو ثابت کرو کہ اونکے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط بعید البیضوی ہی جسکے خطوط ممتنع الملاقات قریب البیضوی محورون پر زاویہ میلان بر بناتے ہین کہ

مس بر = ½ مس ب

(۲۵) اس خط منحنی

ط لا² + ۲ ص لا ی + س ی² + ۲ ی لا + ۲ ف ی + گ = ۰

کے اون اوتار کے نقاط وسط کا مقام النقاط دریافت کرو جو متوازی خط لا جب ر - ی جم ر = ۰ اور اوسے خط منحنی کے بڑے محورون کا مقام دریافت کرو

(۲۶) ثابت کرو کہ مساوات

$(لا^2 - ط^2)^2 + (ی^2 - ط^2)^2 = ط^4$

دو بیضو یون کو تعبیر کرتی ہی

# چودہوان باب

(۲۸۱) اب یہان مسائل متفرقہ بیان کرینگے جو تمام مسائل مختلفہ اشنہای مخروطی سے متعلق ہین مساوات تراشش مخروطی کی اوس حالت مین دریافت کرو کہ مبداء اور محورون کے مقام کی واسطے کوئی قید نہو

فرض کرو کہ ط اور ص محدد ین ماکہ کے ہون اور مساوات خط منتظم کے یہہ ہے کہ

$$\text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{س} = 0$$

فاصلہ کسی نقطہ (لا ی) کا ماسکہ سے یہہ ہے

$$\left[(\text{لا} - \text{ط})^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

اور فاصلہ اسی نقطہ کا خط منتظم سے

$$\frac{\text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{س}}{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}} \text{ ہے}$$

فرض کرو کہ ی نسبت خارج المرکزی تراشش مخروطی کی ہی تو اگر نقطہ (لا ی) خط منحنی پر ہو تو بموجب حدود کے

$$\left[(\text{لا} - \text{ط})^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{ی}(\text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{س})}{(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore (\text{لا} - \text{ط})^2 + (\text{ی} - \text{ص})^2 = \frac{\text{ی}^2(\text{ا لا} + \text{ب ی} + \text{س})^2}{\text{ا}^2 + \text{ب}^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

اب مساوات (۱) مین ہم یہہ دیکھتے ہین کہ تراشش مخروطی کی کسی نقطہ کا فاصلہ ماسکہ سے خواہ مبدء اور محور کچھہ ہی ہو اوس نقطہ کی محددین کے اول قوت ارقام مین بیان ہو سکتا ہی اور اسکو اکثر اسطرح بیان کیا کرتی ہین کہ فاصلہ کسی نقطہ کا ماسکہ سے اوس نقطہ کے محددین کا طولانی جملہ ہوتا ہی

(۲۸۲) ابواب گذشتہ مین جو تراشہاء مخروطی لکھی ہین اونکی مساواتون کے امتحان کرنے سی معلوم ہوگا کہ کوئی تراشش مخروطی ہو اس مساوات

$$\text{ی}^2 = \text{م لا} + \text{ن لا}^2$$

سے تعبیر ہو سکتی ہے مبدء راس خط منحنی کا ہے اور محور لا کا محور خط منحنی کا ہی م عرض مستقیم خط منحنی کا ہے اور قریب البضیوی مین ن = ۰ اور اور بیضیوی مین ن منفی اور بعید البضیوی مین ن مثبت ہی دائرہ مین م قطر دائرہ کا ہے اور ن = −۱

(۲۸۳) دوسرے درجہ کے خط منحنی کے کسی نقطہ سے جو مماس نکالا جاے اوسکی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی یہہ ہے کہ

$$\text{ط لا}^2 + \text{ص لا ی} + \text{س ی}^2 + \text{د لا} + \text{ی ی} + \text{ق} = 0 \quad (1)$$

محور خواہ قائم الزاویہ ہون یا منحرف ہون

فرضکرو کہ لا' اور ی' ایک نقطہ کے محددین مین

لا'' اور ی'' اوسکے متصل کے نقطہ کے محددین مین

تو مساوات خط قاطع کی ان نقاط مین یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{ی}' = \frac{\text{ی}'' - \text{ی}'}{\text{لا}'' - \text{لا}'}(\text{لا} - \text{لا}') \quad \ldots\ldots (2)$$

چونکہ (لاَ و یَ) اور (لاً و یً) خط منحنی پر ہین

ط لاَ² + ص لاَ یَ + س یَ² + د لاَ + ی یَ + ف = ۰

ط لاً² + ص لاً یً + س یً² + د لاً + ی یً + ف = ۰

∴ ط (لاً² − لاَ²) + ص (لاً یً − لاَ یَ) + س (یً² − یَ²) + د (لاً − لاَ) + ی (یً − یَ) = ۰

یعنی (لاً − لاَ) [ط (لاً + لاَ) + ص یً + د]

+ (یً − یَ) [س (یً + یَ) + ص لاَ + ی] = ۰

∴ (یً − یَ) / (لاً − لاَ) = − [ط (لاً + لاَ) + ص یً + د] / [س (یً + یَ) + ص لاَ + ی]

اسے معلوم ہوا کہ مساوات (۲) کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

ی − یَ = − [ط (لاً + لاَ) + ص یً + د] / [س (یً + یَ) + ص لاَ + ی] (لا − لاَ) . . . . (۳)

اس مساوات کو یون مختصر کر سکتے ہین کہ

ی (۲س یَ + ص لاَ + ی) + لا (۲ط لاَ + ص یَ + د)

= یَ (۲س یَ + ص لاَ + ی) + لاَ (۲ط لاَ + ص یَ + د)

= ۲ (ط لاَ² + ص لاَ یَ + س یَ² + د لاَ + ی یَ + ف) − د لاَ − ی یَ − ۲ف

∴ ی (۲س یَ + ص لاَ + ی) + لا (۲ط لاَ + ص یَ + د) + د لاَ + ی یَ + ۲ف = ۰ . (۴)

اگر ف = ۰ تو خط منحنی مبدء مین گذرتا ہی اور مساوات مماس کی اوس نقطہ پر یہہ ہوگی کہ

ی = − (د / ی) لا

اسمین ہم دیکھتے ہین کہ لا² اور ی² یا لا ی کے امثال جو مساوات خط منحنی مین ہین نہین ملتفت ہوتے

(۲۸۴) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) خط منحنی کو تعبیر کرے اور محور قائم الزاویہ ہون تو مساوات عمود المماس کی نقطہ (لاَ و یَ) پر یہہ ہوگی کہ

ی − یَ = (۲س یَ + ص لاَ + ی) / (۲ط لاَ + ص یَ + د) (لا − لاَ)

(۲۸۵) دفعہ ۱۸۳ کی طرح یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ اگر دفعہ ۲۸۳ کی مساوات (۱) سے جو خط منحنی تعبیر ہوتا ہی اوسکی مماس نقطہ (ح اور ق) سے نکالین تو مساوات وتر مماس کی یہہ ہوگی

ی (۲س ق + ص ح + ی) + لا (۲ط ح + ص ق + د) + د ح + ی ق + ۲ف = ۰

(۲۸۶) تراش مخروطی کے تمام اوتار جو خط منحنی کے نقطہ معلوم سے کھینچے جاوین مجاذی زاویہ قائمہ رکھتے ہین عمود المماس پر اوس نقطہ پر تقاطع کرتے ہین

خط منحنی کے نقطہ معلوم کو قائم الزاویہ محوروں کے نظام کا مبدء مقرر کرو اور فرض کرو کہ مساوات خط منحنی کی یہہ ہی

ط لا² + ص لا ی + س ی² + د لا + ی ی = ۰ (۱)

اس مساوات مین ی = ۰ کے مقرر کرنے سے وہ نقطے معلوم ہونگے جنپر محور لا کا خط منحنی سے ملتا ہے یعنی نقاط لا = ۰ اور لا = − د/ط معلوم ہونگے

اور اسیطرح محور ی کا خط منحنی سے جس نقطہ پر ملتا ہی اوسکے واسطے ی = − ی/س

اسے معلوم ہوا کہ مساوات

$$\frac{لا}{-\frac{د}{ط}} + \frac{ی}{-\frac{ی}{س}} = ۱$$

یعنی $\frac{لا ط}{د} + \frac{س ی}{ی} + ۱ = ۰$ . . . . . . (۲)

اوس وتر کو تعبیر کرتی ہی جو محور اور خط منحنی کے نقاط تقاطع مین ملایا جائے

اور نیز مساوات عمود الماس خط منحنی کی جو مبدء سے نکلین بموجب دفعہ ۲۸۴ کے یہہ ہے کہ

$$ی = \frac{ی}{د} لا \quad (۳)$$

اسے معلوم ہوا کہ (۲) اور (۳) اوس نقطہ پر ملتی ہین جسکے محددین

$$\frac{-د}{ط + س} \text{ اور } \frac{-ی}{ط + س}$$

ہین اور جسکا بعد اسیواسطے مبدء سے یہہ ہے کہ

$$\frac{\sqrt{(د^2 + ی^2)}}{ط + س}$$

اب محورون کی سمتون کو تبدیل کرو اور مبدء کو بدستور رکھو تو مساوات (۱) یہہ ہو جائیگی کہ

ط' لا² + ص' لا ی + س' ی² + د' لا + ی' ی = ۰

اور دفعات ۲۷۴ اور ۲۷۵ سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ

ط' + س' = ط + س اور د'² + ی'² = د² + ی²

اسے معلوم ہوا کہ عمود الماس مبدء سے وتر جدید کے اوس بعد پر مبدء سے ملاقی ہوگا جسپر وہ اصلی وتر سے ملتا ہی یعنی وہ ایک ہی نقطہ پر ملیگا اور چونکہ یہہ سب صورتون مین درست ہے خواہ محورون کی کچھہ ہی سمت ہو اسے یہہ نتیجہ پیدا ہوتا ہی کہ تمام اوتار ایک ہی نقطہ پر تقاطع کرتے ہیں

(۲۸۷) دفعات ۱۵۹ اور ۲۰۴ اور ۲۶۴ کو باہم مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہی کہ مساوات قطبی کسی راس مخروطی کی جسکا ماسکہ قطب ہو اور خط ابتدائی محور ہو یہہ ہے کہ

$$نق = \frac{ل}{۱ + ی \, جم \, ر}$$

اسمین ل = نصف عرض مستقیم کے

اسکو دعوی آیندہ کے اثبات مین کام مین لائینگے

نصف عرض مستقیم کسی تراش مخروطی کا اوسط موسیقیہ اوس تراش مخروطی کی وتر ماسکہ کی اون حصون کے درمیان ہوتا ہے جو اوسکے نقطہ ماسکہ سے بنتے ہین

فرض کرو کہ $\angle$ اص ع = ر شکل دفعہ ۱۵۸ کی دیکھو

$$\therefore \quad \text{ص ع} = \frac{\text{ل}}{1 + \text{ی جم ر}}$$

فرض کرو کہ ص ع خارج کیا گیا خط منحنی سکے نقطہ عَ پر ملتا ہے تو

$$\text{ص عَ} = \frac{\text{ل}}{1 + \text{ی جم (ل + ر)}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{ص ع}} + \frac{1}{\text{ص عَ}} = \frac{1 + \text{ی جم ر}}{\text{ل}} + \frac{1 - \text{ی جم ر}}{\text{ل}}$$

$$= \frac{2}{\text{ل}}$$

اسے دعوی ثابت ہے

(۲۹۸) قطبی مساوات کسی تراش مخروطی کی مماس کی جب ماکہ اوسکا قطب ہو اور خط ابتدائی محور ہو بموجب دفعہ ۲۰۵ کے یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{ق}} = \text{ی جم ر} + \text{جم (ھ - ر)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

اسمین ھ نقطہ مماس کا محدد قوسی ہے

اسطرح مساوات قطبی مماس کے جو اوس نقطہ سے نکالا جاے جسکا محدد قوسی ب ہی یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{ق}} = \text{ی جم ر} + \text{جم (ب - ر)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

اور جس نقطہ پر یہہ دونو مماس ملتے ہین اوسپر ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{جم (ھ - ر)} = \text{جم (ب - ر)}$$

$$\text{لیکن} \quad \text{ھ - ر} = \text{ب - ر}$$

کبھی نہین ہوسکتا کیونکہ ھ اور ب بموجب فرض کے مختلف ہین اسیواسطے ہم یہہ مقرر کرتے ہین کہ

$$\text{ھ - ر} = \text{ر - ب}$$

$$\therefore \quad \text{ر} = \frac{\text{ھ + ب}}{2}$$

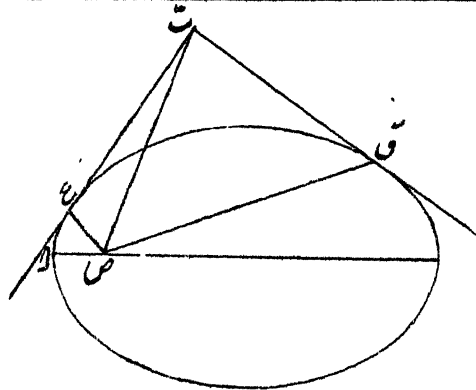
اسے معلوم ہوا کہ مماس جس نقطہ پر ملتے ہین اوسکا محدد قوسی $\frac{\text{ھ + ب}}{2}$ ہے

مثلاً فرض کرو کہ تراش مخروطی بیضوی اور

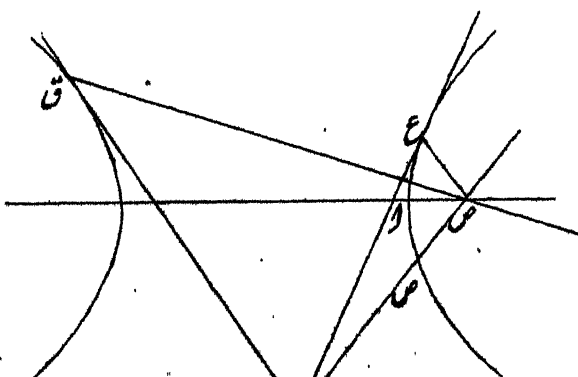
$$\angle \text{اص ع} = \text{ھ و} \angle \text{اص ق} = \text{ب}$$

اور مماس نقاط ع اور ق سے نکالے گئے نقطہ ت پر ملتے ہین

$$\therefore \text{ا ص ت} = \frac{\text{ھ} + \text{ب}}{2}$$

$$\therefore \text{ع ص ت} = \frac{\text{ب} - \text{ھ}}{2} = \text{ق ص ت}$$

یعنی کسی نقطہ سے دو مماس بیضوی کے کھیچے گئے نقاط ماسکہ پر اپنی محاذی برابر زاوئیے بناتی ہین
علی ہذا القیاس قریب البیضوی کے کسی نقطہ سے دو مماس کھیچے گئے ماسکہ پر اپنی محاذی برابر زاوئے بناتے ہین

اب بعید البیضوی مین دو صورتین ہین اونمین تمیز کرنی چاہئے دفعہ ۱۳۱ مین ہم نے ثابت کردیا ہے
جو نقطہ خط منحنی اور خطوط ممتنع الملاقات کے اندر واقع ہو اوس سے دو مماس ایسے کھیچے جاسکتے ہین کہ
خط منحنی کے ایک ہی فرع سے ملین لیکن کسی نقطہ سے جو خطوط ممتنع الملاقات کی زوایاء مکمل کے
درمیان واقع ہو دو مماس خط منحنی کے مختلف فروع کے کھیچے ہین

اب اگر ایک نقطہ سے دو مماس نکالے گئے ایک ہی فرع بعید البیضوی سے ملتے ہین تو وہ بیضوی
کی طرح ثابت ہو سکتا ہی کہ اونکی محاذی زاوئے ماسکہ پر مساوی ہین
اب ہم وہ صورت لکھتے ہین جسمین مماس مختلف فروع کو مس کرتے ہین

فرض کرو کہ ت ایک نقطہ پر مماس ت ع اور ت ق مختلف فرع ابعد القصوی کے ملتے ہین

اور اص ع = ھ کے اور زاویہ جو ص کی جانب سی ق ص محدودہ اص سے زاویہ بناتا ہے

ب ہی تو زاویہ ب ٹرا ک سی ہے اور اص ق = ب − ک

پس مساواتین ت ع اور ب ق جداگانہ یہہ ہونگین

ل/لو = ی جم ر + جم (ھ − ر) اور ل/لو = ی جم ر + جم (ب − ر)

اور نقطہ ت پر وہ ملتی ہین اسلئے ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

جم (ھ − ر) = جم (ب − ر)

اسواسطے ر = (ھ + ب)/۲ کے مقرر کر سکتے ہین یعنی ایک زاویہ (ھ + ب)/۲

حاصل ہوگا جو ب ص محدودہ اص کے ساتھہ بناتا ہے پس

اص ت = ک − (ھ + ب)/۲

اور ت ص ق = (ب − ھ)/۲

∴ ت ص ع = ک − (ب − ھ)/۲

∴ ت ص ع + ت ص ق = ک

یعنی زاویہ جو ایک مماس اپنے محاذی ہر ایک ہاسکہ پر بناتا ہی وہ تکملہ اوس زاویہ کا ہوتا ہی جو دوسرا

مماس اپنے محاذی اوسی ہاسکہ پر بناتا ہی

(۲۸۹) ہم نے دفعہ ۱۳۰ مین قطب اور قطبیہ کی تعریف باعتبار دائرہ کے لکھی ہی یہی تعریف ہر تراشش

مخروطی کی لحاظ ہی ہو سکتی ہے فقط لفظ دائرہ کی جگہہ تراشش مخروطی لکھدو

پس اگر مساوات خط منحنی کی یہہ ہو کہ

ط لا² + ص لا ی + س ی² + د لا + ی ی + ف = ۰

تو مساوات قطبیہ (لاَ و یَ) کی بموجب دفعہ ۲۸۳ کے یہہ ہوگی

لا (۲ ط لاَ + ص یَ + د) + ی (۲ س یَ + ص لاَ + ی) + د لاَ + ی یَ + ۲ ف = ۰

(۲۹۰) اگر ایک خط مستقیم دوسرے خط مستقیم کے قطب مین گذرے تو دوسرا خط مستقیم پہلے خط

مستقیم کے قطب مین گذریگا

فرض کرو کہ (لاَ و یَ) قطب اول خط مستقیم کا ہو تو

لا (۲ ط لاَ + ص یَ + د) + ی (۲ س یَ + ص لاَ + ی) + د لاَ + ی یَ + ۲ ف = ۰　(۱)

مساوات اوا خط کی ہے

فرض کرو کہ (لاً و یً) قطب دوسرے خط مستقیم کا ہو تو

لا (۲ط لاً + ص یً + د) + ی (۲س یً + ص لاً + ی)
+ د لاً + ی یً + ۲ف = ۰ . . . (۲)

مساوات دوسرے خط مستقیم کی ہے

چونکہ (۱) درمیان (لاً و یً) کے گذرتا ہے تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

لاً (۲ط لا + ص ی + د) + یً (۲س ی + ص لا + ی) + د لا + ی ی + ۲ف = ۰

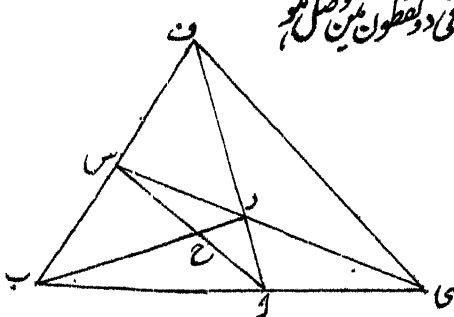
یعنی

لا (۲ط لاً + ص یً + د) + ی (۲س یً + ص لاً + ی) + د لاً + ی یً + ۲ف = ۰

اسے معلوم ہوتا ہے کہ (۲) نقطہ (لا و ی) پر گذرتا ہے

(۲۹۱) دو خطوط منتظم کا نقطہ تقاطع قطب اوس خط مستقیم کا ہوتا ہے جو اون خطوط مستقیم کے قطبوں میں ملا ہوا ہے

دفعہ ۲۲۳ دیکھو

(۲۹۲) اگر ذو اربعۃ الاضلاع اب س د تراش مخروطی کے اندر بنایا جائے تو تین نقاط ی اور ف اور ح میں سے ہر ایک قطب اوس خط کا ہوگا جو باقی دو نقطوں میں واصل ہے

فرض کرو کہ ی مبدء ہو اور ی ا اور ی د سمت لا اور ی کی محوروں کی ہو

اور مساوات تراش مخروطی کی یہہ ہو کہ

ط لا² + ص لا ی + س ی² + د لا + ی ی + ف = ۰ . . . (۱)

اور نیز یہہ بھی فرض کرو کہ

ی ا = ح اور ی ب = حً
ی د = ق اور ی س = قً

مساوات ا س کی $\frac{لا}{ح} + \frac{ی}{قً} = ۱$ . . . (۲) ہے

ب د کی $\frac{لا}{حً} + \frac{ی}{ق} = ۱$ . . . (۳) ہے

ا د کی $\frac{لا}{ح} + \frac{ی}{ق} = ۱$ . . . (۴) ہے

س ب کی $\frac{لا}{حً} + \frac{ی}{قً} = ۱$ . . . (۵) ہے

(۴) اور (۳) سے یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے کہ

لا $\left(\frac{1}{ح} + \frac{1}{حَ}\right)$ + ی $\left(\frac{1}{وَ} + \frac{1}{وَ}\right)$ = ۲ (۶)

یہہ مساوات اوس خط کی ہی جو نقطہ ح پر گذرتا ہی لیکن (۴) اور (۵) سے یہہ مستنبط ہوتا ہے کہ (۶) بعض خط کی مساوات کو تعبیر کرتا ہی جو نقطہ ف پر گذرتا ہی اسے معلوم ہوا کہ

(۶) مساوات ف ح کی ہو

فرض کرو کہ (۱) مین ی = ۰ تو مساوات درجہ دوم کی یہہ ہو گی کہ

ط لا۲ + د لا + ف = ۰

اور قیمتین اس مساوات کی ح اور حَ ہین اسے معلوم ہوا کہ

ح + حَ = − $\frac{د}{ط}$ اور ح حَ = $\frac{ف}{ط}$

∴ $\frac{1}{ح} + \frac{1}{حَ}$ = − $\frac{د}{ف}$

اسیطرح $\frac{1}{وَ} + \frac{1}{وَ}$ = − $\frac{ی}{ف}$

اسے معلوم ہوا کہ (۶) کی صورت یہہ ہو جائگی

د لا + ی ی + ۲ ف = ۰

لیکن یہہ بموجب دفعہ ۲۸۹ کے مساوات قطبیہ مبدء کی ہے اسیواسطے ف ح قطبیہ ی کا ہے

اور علی ہذا القیاس ی ح قطبیہ ف کا ہی اسے ثابت ہوا کہ بموجب دفعہ ۲۹۱ کی ح قطب ی ف کا ہی

(۲۹۳) جب محور مماس ہون تو مساوات عامہ تراش مخروطی کی دریافت کرو

فرض کرو ط لا۲ + ص لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی + ف = ۰ (۱)

مساوات تراش مخروطی کی ہو

محور لا سے جہان خط منحنی ملتا ہی وہان ی = ۰ کے اوپر کی مساوات مین سے پس

ط لا۲ + د لا + ف = ۰

اگر محور لا کا مماس خط منحنی کا ہو تو وہ خط منحنی سے صرف ایک نقطہ پر بموجب دفعہ ۱۷۱ کے ملیگا اسے معلوم ہوا کہ مساوات بالا کی قیمتین مساوی ہون اسیواسطے

د۲ = ۴ ط ف (۲)

اور علی ہذا القیاس محور ی کا مماس (۱) کا ہی اسلئے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

ی۲ = ۴ س ف (۳)

اب قیمتین ط اور س کی (۲) اور (۳) سے نکالکر (۱) مین رکھو تو (۱) کی یہہ صورت ہو جائگی

د۲ لا۲ + ۴ د ف لا + ی۲ ی۲ + ۴ ی ف ی + ۴ ص ف لا ی + ۴ ف۲ = ۰

یعنی (د لا + ی ی + ۲ ا ف)^۲ + (۴ ص ف − ۲ د ی) لا ی = ۰

یعنی (د/۲ ا ف لا + ی/۲ ا ف ی + ۱)^۲ + (۲ ص ف − د ی)/(۲ ا ف^۲) لا ی = ۰

د/۲ ا ف = − ۱/حه اور ی/۲ ا ف = − ۱/ق اور (۲ ص ف − د ی)/(۲ ا ف^۲) = و

پس مساوات مطلوبه یهه حاصل ہو گی که

(لا/ح + ی/ق − ۱)^۲ + و لا ی = ۰

لا اور ی = ۰ کے متواتر رکہنے سے ہم دیکہتے ہین که ح وہ فاصله مبدا سے ہی جسپر خط منحنی محور لا سے ملتا ہے اور ق وہ فاصله مبدا سے ہے جسپر خط منحنی محور ی سے ملتا ہے

اگر یهه مطلوب ہو که ایسی تراش مخروطی دریافت کرین که جو دو خطوط مستقیمه معلومه کو دو معلوم نقطون پر مس کرے اور ایک اور نقطه معلوم پر گذرے تو ہمکو وہ مساوات جو سب سے اخر لکہی ہوئی ہے فرض کرنی چاہئے اور جن خطوط کو وہ مس کرنے اونکو محور لا اور ی کے مقرر کرنے چاہئے اور پہر اس نقطه کے محددین کو جسپر وہ تراش مخروطی گذرے مساوات مین مندرج کرو

تو ایک قیمت و کی دریافت ہو گی پس اسے معلوم ہوا که فقط ایک ہی تراش مخروطی ہی جو معطیات کی شرائط کو پورا کرتی ہین

(۲۹۴) فرض کرو که مساوات

(لا/ح + ی/ق − ۱)^۲ − و لا ی = ۰ (۱)

قریب الحنفوی کو تعبیر کرتی ہے تو بموجب دفعه ۲۸۰ کے

(ح ق + و)^۲ = ۴/(ح^۲ ق^۲)

∴ و = ۰ یا و = − ۴/(ح ق)

اگر و = ۰ تو (۱) یهه ہو جائیگی که

لا/ح + ی/ق − ۱ = ۰

یهه مساوات اوس خط کو تعبیر کرتی ہی که نقاط مماس (۱) اور محورون مین وصل ہو

اگر و = − ۴/(ح ق) تو ہمکو (۱) سے یهه حاصل ہوتا ہے که

(لا/ح + ی/ق − ۱)^۲ = ۴ لا ی/(ح ق) . . . . . (۲)

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ح}} + \frac{\text{ی}}{\text{ق}} - ۱ = \pm \sqrt{\frac{\text{لا ی}}{\text{ح ق}}}$$

$$\therefore \frac{\text{لا}}{\text{ح}} \mp ۲\sqrt{\frac{\text{لا ی}}{\text{ح ق}}} + \frac{\text{ی}}{\text{ق}} = ۱$$

$$\therefore \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{ح}}} \mp \sqrt{\frac{\text{ی}}{\text{ق}}} = \pm ۱$$

اسکو اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{ح}}} + \sqrt{\frac{\text{ی}}{\text{ق}}} = ۱ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۳)$$

اور یہہ یاد رکہین کہ جذر کی علامتین مثبت یا منفی ہونگین پس (۳) مساوات قریب البیضوی کی ہی جسکی محور دو مماس قریب البیضوی کے ہین

(۲۹۵) قریب البیضوی کے مماس کی مساوات کی یہہ صورت ہی کہ

$$\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{ح}}} + \sqrt{\frac{\text{ی}}{\text{ق}}} = ۱ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (۱)$$

مساوات خط قاطع کی جو (لاَ و یَ) و (لاً و یً) پر گذرتا ہی یہہ ہے

$$\text{ی} - \text{یَ} = \frac{\text{یً} - \text{یَ}}{\text{لاً} - \text{لاَ}} (\text{لا} - \text{لاَ})$$

چونکہ (لاَ و یَ) اور (لاً و یً) قریب البیضوی پر ہین توہمکو یہان حاصل ہوتا ہے

$$\sqrt{\frac{\text{لاَ}}{\text{ح}}} + \sqrt{\frac{\text{یَ}}{\text{ق}}} = ۱ \text{ اور}$$

$$\sqrt{\frac{\text{لاً}}{\text{ح}}} + \sqrt{\frac{\text{یً}}{\text{ق}}} = ۱$$

$$\frac{\sqrt{\text{لاَ}} - \sqrt{\text{لاً}}}{\sqrt{\text{ح}}} = -\frac{\sqrt{\text{یَ}} - \sqrt{\text{یً}}}{\sqrt{\text{ق}}}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{یً} - \text{یَ}}{\text{لاً} - \text{لاَ}} = \frac{\sqrt{\text{یً}} - \sqrt{\text{یَ}}}{\sqrt{\text{لاً}} - \sqrt{\text{لاَ}}} \cdot \frac{\sqrt{\text{یً}} + \sqrt{\text{یَ}}}{\sqrt{\text{لاً}} + \sqrt{\text{لاَ}}} = -\frac{\sqrt{\text{ق}}}{\sqrt{\text{ح}}} \cdot \frac{\sqrt{\text{یً}} + \sqrt{\text{یَ}}}{\sqrt{\text{لاً}} + \sqrt{\text{لاَ}}}$$

اسسے معلوم ہوا کہ مساوات قاطع المنحنی کی اسطرح لکھہ سکتی ہین کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\sqrt{\text{ق}}}{\sqrt{\text{ح}}} \cdot \frac{\sqrt{\text{یَ}} + \sqrt{\text{یً}}}{\sqrt{\text{لاَ}} + \sqrt{\text{لاً}}} (\text{لا} - \text{لاَ})$$

پس مساوات مماس کی جو (لاَ و یَ) پر ہو یہہ ہوگی کہ

$$\text{ی} - \text{یَ} = -\frac{\sqrt{\text{ق یَ}}}{\sqrt{\text{ح لاَ}}} (\text{لا} - \text{لاَ})$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{ی}}{\sqrt{(\text{ق یَ})}} + \frac{\text{لا}}{\sqrt{(\text{ح لاَ})}} = \frac{\text{یَ}}{\sqrt{(\text{ق یَ})}} + \frac{\text{لاَ}}{\sqrt{(\text{ح لاَ})}} = ۱$$

# متشابہ خطوط منحنی

(۲۷۶) دو خطوط منحنی کو متشابہ اور ہم وضع کہتے ہین جب نصف قطر دائر کسی نقطہ معین سے
کسی سمت مین اول خط منحنی تک کہیچا گیا نسبت بالاستقلال دوسرے نصف قطر دائر سے رکہی جو
کسی نقطہ معین سے دوسرے خط منحنی تک سمت متوازی مین کہیچا جاے

یا دو خطوط منحنی کو متشابہ کہتی ہین جب کہ نصف قطر دائر کسی نقطہ معین سے اول خط منحنی تک کسی سمت مین
کہیچا گیا نسبت بالاستقلال اوس نصف قطر دائرہ سے رکہے جو کسی نقطہ معین سے دوسرے خط منحنی تک
اسی سمت مین کہیچا جاے کہ وہ پہلی سمت پر زاویہ مستقل پر میلان رکہے

ان دو نقاط معین کو مرکز ہاء مشابہت کہتے ہین

اگر دو خطوط منحنی متشابہ ہون اور مرکز ہاء مشابہت کا زوج موجود ہو تو ازواج مرکز ہاء مشابہت کے
بے شمار دریافت ہو سکتی ہین

اسواسطے کہ فرض کرو ط اور طَ مرکز ہاء مشابہت کی زوج کو تعبیر کرین اور ط ع اور ط ق نصف اقطار دائرہ
اول خط منحنی کے ہون اور طَ عَ اور طَ قَ اونکے متناظر نصف اقطار دائرہ دوسرے خط منحنی کے ایسے ہون
کہ زاویہ ع ط ق = زاویہ عَ طَ قَ اور

$$\frac{\text{ع ط}}{\text{عَ طَ}} = \frac{\text{ط ق}}{\text{طَ قَ}}$$

کوئی نقطہ ص مقرر کرو اور ط مین خط ملاؤ اور زاویہ ع ط ص = زاویہ عَ طَ صَ زاویے ایک ہی
سمت مین اندازہ کئے جاتے ہین اور طَ صَ ایسا مقرر کرو کہ

$$\frac{\text{طَ صَ}}{\text{ط ص}} = \frac{\text{طَ عَ}}{\text{ط ع}}$$

پس ص اور صَ بہی مرکز ہاء مشابہت ہوئی

اسواسطے کہ ص ع اور ص ق اور صَ عَ اور صَ قَ ملاؤ تو مثلث ص ط ع اور صَ طَ عَ متشابہ
اور مثلث ص ط ق اور صَ طَ قَ بہی متشابہ ہین
اسسے باسانی استخراج ہوتا ہے کہ

زاویہ ق ص ع = قَ صَ عَ

اور $\frac{ص ع}{ص ع} = \frac{ص ق}{ص ق}$

پس دعوی ثابت هی

(۲۹۸) تمام قریب البضویان متشابه هوتی هین

فرضکرو که ۲ط عرض مستقیم ایک قریب البضوی هو اور ۲ط عرض مستقیم دوسرے قریب البضوی کا
تو قطبیه مساواتین ان خطوط منحنی کی جنکے ماسکه جداگانه قطب هون یهه هین که

$$و = \frac{۲ط}{۱ + جم ر}$$

$$و = \frac{۲ط}{۱ + جم ر}$$

اسے معلوم هوا که اگر ر = ر تو یهه حاصل هوگا که

$$\frac{و}{و} = \frac{ط}{ط}$$

پس کوئی سی دو قریب البضویان هون وه متشابه هوتی هین اور ماسکه اونکی مرکز هامشابهت هوتے هین

(۲۹۹) وه شرائط دریافت کرو جنسے که خطوط منحنی

$$ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + د لا + ی ی + ق = ۰ \quad (۱)$$

$$ط لا^۲ + ص لا ی + س ی^۲ + د لا + ی ی + ق = ۰ \quad (۲)$$

متشابه اور هم وضع هون

فرضکرو که مرکز ها مشابهت (ح و ق) و (ح و ق) هین (۱) مین بجاے لا اور ی کے

$$ح + و جم ر \quad اور \quad ق + و جب ر$$

جداگانه رکهو تو و کی مساوات درجه دوم حاصل هوگی جسکو اسطرح لکهه سکتی هین که

$$ل و^۲ + م و + ن = ۰ \quad (۳)$$

(۲) مین بجاے لا اور ی کے

$$ح + و جم ر \quad اور \quad ق + و جب ر$$

رکهو تو و کی مساوات درجه دوم حاصل هوگی جسکو اسطرح لکهه سکتی هین که

$$ل و^۲ + م و + ن = ۰ \quad (۴)$$

اب خطوط منحنی کے متشابه اور هم وضع هونے کے واسطے ضرور هے که و = لر و اسمین لر کوئی
مقدار مستقل هے پس (۴) کی یهه صورت هوگی که

(۵) [illegible]

چونکہ (۳) یا (۵) سے قیمتین ق کی حاصل ہوسکتی ہین تو یہہ مساواتین متطابقہ ہونگین لیس

ل/(ک ک ل) = م/(ک م) = ن/ن . . . . (۶)

چونکہ ن اور نَ مین ر ملتفت نہین ہے تو شرط ضروری یہہ استنباط ہوگی خواہ کچہہ ہی ہو
کہ ل/لَ مقدار مستقل ہو

ل اور لَ کی جگہہ اونکی قیمتین رکہو تو

(ط جم^۲ ر + ص جب ر جم ر + س جب^۲ ر) / (طَ جم^۲ ر + صَ جب ر جم ر + سَ جب^۲ ر) = ایک مقدار مستقل = و کی مقرر کرو (۷)

∴ (ط − وطَ) جم^۲ ر + (ص − وصَ) جب ر جم ر + (س − وسَ) جب^۲ ر = ۰

چونکہ یہہ صحیح ہے خواہ ر کچہہ ہی ہو اسے یہہ استخراج ہوتا ہے کہ

ط/طَ = ص/صَ = س/سَ . . . . (۸)

پس اسے معلوم ہوا کہ (۱) اور (۲) متشابہ اور ہم وضع ہونیکے واسطے شرائط ضروری وہ ہین جو (۸) مین مندرج ہین اب ہم یہہ بہی تحقیق کرتے ہین کہ یہہ شرائط متشابہ ہونیکے واسطے کافی ہین سیدہی ترکیب تو یہہ ہے اس بات کا امتحان کیاجای کہ ح و ق دا و حَ اور قَ ایسی منتخب کئے جائین کہ مساوات (۶) قائم رہی لیکن بہت سہج ترکیب یہہ ہی کہ مساواتین (۱) اور (۲) بوساطت (۸) کے اسطرح لکہی جاسکتی ہین کہ

ط لا^۲ + ص لا ء + س ء^۲ + د لا + ی ء + ف = ۰

ط لا^۲ + ص لا ء + س ء^۲ + ۱/و (دَ لا + یَ ء + فَ) = ۰

**اول** فرض کرو کہ ص^۲ − ۴ ط س = ۰ تو اکثر خط منحنی قریب البیضوی ہوتا اور اسیواسطے یہہ خط متشابہ ہوتے ہین اور نیز اونکے قطر بہی متوازی ہوتی ہین اسلئے وہ ہم وضع بہی بموافق دفعہ ۲۷۹ کے ہوتے ہین اس نتیجہ کی بعض صورتین مستثنی بہی ہین اور یہہ مستثنی صورتین اس حالتمین پیدا ہوتی ہین کہ مقام النقاط بجای قریب البیضوی کی دو خطوط مستقیم یا ایک خط مستقیم یا نا ممکن ہو

**دوم** فرض کرو کہ ص^۲ − ۴ ط س برابر صفر کے نہو تو ہم مبدء کو بدل کر ہر ایک خط منحنی کی مساوات کو

اس صورت مین تحویل کر سکتے ہین

ط لا² + ص لا ی + س ی² + ف₁ = ۰

ط لا'² + ص لا' ی' + س ی'² + ف₂ = ۰

اب ان مساواتون کو قطبی محددین مین بیان کر کے اونکی یہہ صورت بنا سکتے ہین

نق² = −ف₁ / (ط جم² ر + ص جب ر جم ر + س جب² ر)

نق'² = −ف₂ / (ط جم² ر' + ص جب ر' جم ر' + س جب² ر')

پس اگر ر = ر' تو ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ نق/نق' = مقدار مستقل کے ہین

اسے معلوم ہوا کہ اکثر یہہ خطوط منحنی متشابہ اور ہم وضع ہونگے مگر اس نتیجہ کی بعض صورتین مستثنی بہی ہین اور یہہ مستثنی صورتین اس سبب سے پیدا ہونگین کہ کوئی مقام انعکاس بجای خط منحنی ہونیکے دو خطوط مستقیم یا ایک نقطہ یا نا ممکن ہو

(۳۰۰) دفعہ ۲۹۹ کی (۱) اور (۲) کے خطوط منحنی کا فقط متشابہ ہونا ہم چاہتے ہین اور اوسکے ساتہہ ہم وضع ہونیکی قید نہین لگاتی (۱) مین لا اور ی کی جگہہ

ح + نق جم ر اور ق + نق جب ر

رکہو اور (۲) مین لا اور ی کی جگہہ جداگانہ

ح' + نق' جم (ر + هه) اور ق' + نق' جب (ر + هه)

رکہو اسمین هه بعض مستقل زاویہ کی مقدار ہی مگر بالفعل وہ غیر المعین ہی دفعہ ۲۹۹ کی طرح عمل کرو تو بجای مساوات (۷) کے یہہ مساوات ہمکو حاصل ہوگی کہ

(ط جم² ر + ص جب ر جم ر + س جب² ر) / (ط' جم² (ر + هه) + ص' جب (ر + هه) جم (ر + هه) + س' جب² (ر + هه))

= ایک مقدار مستقل = لو کے مقرر کرو

اسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

(ط جم² ر + ص جب ر جم ر + س جب² ر) / (ا جم² ر + ب جب ر جم ر + س جب² ر) = لو

اسمین ا = ط' جم² هه + س' جب² هه + ص' جب هه جم هه

ب = ۲ (س' − ط') جب هه جم هه + ص' (جم² هه − جب² هه)

س = ط' جب² هه + س' جم² هه − ص' جب هه جم هه

پس خطوط منحنی کے متشابہ ہونیکے واسطے

$$\frac{ا}{ط} = \frac{ب}{ص} = \frac{س}{س'}$$

اسے معلوم ہوا کہ ان نسبتون مین سے ہریک برابر $\frac{ا+س}{ط+س'}$ کے ہو

$$\therefore \frac{ب^2}{ص^2} = \frac{(ا+س)^2}{(ط+س')^2}$$

$$\therefore \frac{ب^2}{(ا+س)^2} = \frac{ص^2}{(ط+س')^2}$$

اور $\frac{اس}{طس'} = \frac{(ا+س)^2}{(ط+س')^2}$

$$\therefore \frac{اس}{(ا+س)^2} = \frac{طس'}{(ط+س')^2}$$

اسے معلوم ہوا کہ $\frac{ب^2 - 4 اس}{(ا+س)^2} = \frac{ص^2 - 4 طس'}{(ط+س')^2}$

لیکن $ا + س = ط' + س'$

اور $ب^2 - 4 اس = ص'^2 - 4 ط'س'$ دفعہ ۴۷

$$\therefore \frac{ص'^2 - 4 ط'س'}{(ط' + س')^2} = \frac{ص^2 - 4 طس}{(ط + س)^2}$$

اس ارتباط کا قائم ہونا خطوط منحنی کی مشابہت کے واسطے ضرور ہے

## مثالین

(۱) ایک نقطہ معین سے خطوط مستقیم کھیچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ دو خطوط معین کے درمیان جو حصے ان خطوط کے آئینگے اونکی نقاط وسط کا مقام النقاط بعید البیضوی ہوگا جسکے خطوط ممتنع الملاقات متوازی ان خطوط معینہ کے ہونگے

(۲) بیضوی کے کسی نقطہ ع سے ق ع قَ متوازی محور اکبر کا کھیچا گیا ہی اور ع ق اور ع قَ برابر بعد ماسکہ ص ع کے بنائی گئی ہین نقاط ق اور قَ کے مقام النقاط دریافت کرو

(۳) خطوط مستقیم معلومہ ل ع اور ل ق مین نقاط متغیر عَ اور قَ ایسے مقرر کئے گئے ہین کہ ل عَ : ع عَ :: ق قَ : قَ ل تو ثابت کرو کہ ع قَ اور ق عَ کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط بیضوی ہے جو خطوط مستقیم معلومہ کو نقاط ع اور ق پر مس کرتی ہے

(۴) دو مماس ت ع اور ت ق قریب البضوی کے کہیچے گئے ہین اور ع اور ق نقاط تماس ہین اور ایک تیسرا مماس انکو عَ اور قَ جداگانہ کاٹتا ہی تو ثابت کرو کہ

ت عَ / ت ع = ت قَ / ت ق = ۱

(۵) قریب البضوی کے دو مماس متساویہ ت ع اور ت ق ہین اور ع اور ق نقاط تماس ہین اگر ع ت اور ق ت ایک تیسرے مماس سے قطع ہون تو ثابت کرو کہ اونکے حصص علی التبادل آپس مین برابر ہونگے

(۶) ایک قریب البضوی کی نقطہ ط سے دو خط نقاط ع اور ق پر مس کرتے ہوئے کہیچے گئے ہین اور ایک اور خط قریب البضوی کو نقطہ ر پر مس کرتا ہی اور ط ع اور ط ق کو نقاط ص اور ت پر قطع کرتا ہے اگر و نقطہ تقاطع اون خطون کا ہو جو ع ب اور ق ص کو صلیب کی طرح وصل کرتی ہیں تو ط اور ر اور و ایک خط مستقیم ہین ہونگے

(۷) ایک بضوی کے نقطہ بیرونی سے دو مماس کہیچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ جو بضوی اس بضوی کے متشابہ اور ہم وضع ہو گے نقطہ بیرونی اور نقاط تماس اور مرکز بضوی معلوم پر گذرتی ہے

(۸) ا اور ب دو بضویان متحد المرکز متشابہ اور ہم وضع ہین اور س ایک اور بضوی متشابہ ا اور ب کے ہی اور اوسکا مرکز محیط ب پر ہے اور اوسکے محور متوازی ا یا ب کے محورون کے ہین تو ثابت کرو کہ وتر تقاطع ا اور س کا متوازی اوس مماس کا ہوگا جو س کے مرکز سے ب کا نکالا جاے

(۹) کسی نقطہ اور اوسکے خط قطبی اور خط منتظم کے نقطہ تقاطع مین جو خط وصل ہوتا ہے وہ لنے محاذی اپنی نقطہ ماسکہ پر زاویہ قائمہ بناتا ہے

(۱۰) اگر کسی نقطہ معلوم سے عمود الماس بضوی کے کہیچے جائین تو جن نقطون پر بضوی کو قطع کرینگے وہ اوس قائم الزاویہ بعید البضوی پر واقع ہونگے جو نقطہ معلوم پر گذرتی ہے اور اوسکے خطوط ممتنع الملاقات متوازی محور بضوی کے ہونگے

(۱۱) اگر محیط دائرہ کے کسی نقطہ ع کے محدد اور معین س م اور م ع ہین اور م ن برابر م ع کی ہے اور بجہت اوسکے ساتھہ زاویہ مستقل پر میلان رکہتا ہی تو نقطہ ن کا مقام النقاط ایک بضوی ہوگی

(۱۲) ایک تراشِ مخروطی کی یہہ مساوات معلوم ہے کہ

ط لا۲ + ۲ ص لا ی + ی۲ + ف = ۰

تو مقام النقاط اون عمود الماسون کی تقاطع کا دریافت کرو جو ایک ہی محدد بہر زوج معین کے اطراف سے نکالے جائین

(۱۳) دو خطوط معینہ ایک سطح مین ہین اور اون پر ایسے دو نقطے ع اور ق مقرر کی گئی ہین کہ خط ع ق ہمیشہ متوازی ایک خط معلوم کا رہتا ہی اور ع اور ق جدا جدا دو نقاط معینہ ہ اور ر سے ملائے گئے ہین تو ع ہ اور ق ر کے تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۴) ایک دائرہ کے کسی نقطہ ع کا مماس کسی نقطہ معین ا کے مماس سے نقطہ ت پر ملتا ہی اور ت اور اوس قطر کے ایک طرف ب ہن خط ملایا گیا ہی جو ا مین گذرتا ہی تو ثابت کرو کہ اع اور ب ت کے تقاطع کا مقام النقاط بیضوی ہے

(۱۵) مساوات قطبیہ ایک تراشِ مخروطی کی ماسکہ سے یہہ ہے کہ

ل/ق - س جم ر = ص

تو ثابت کرو کہ مساوات اوس خط مستقیم کی جو اوسکو اون نقاط پر قطع کرتا ہی جنکے واسطے ر = ھ اور ب جدا جدا ہین یہہ ہے

ل/ق - س جم ر = ص جم (ر - (ھ + ب)/۲) قط (ھ - ب)/۲

(۱۶) ایک تراشِ مخروطی مین اوتار کہیچے گئے ہین جو ماسکہ پر زاویہ مستقل بناتے ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط موقع عمود کا جو ماسکہ سے وتر پر نکالا جائے ایک دائرہ ہوگا الا ایک صورت مستثنی ہوگی جسمین وہ خط مستقیم ہوگا

(۱۷) اگر تراشِ مخروطی کے انعاد ماسکہ ص ع اور ص ق ہون اور اوسکا زاویہ درمیانی مستقل ہو تو ثابت کرو کہ ع ق متحد الماسکہ تراشِ مخروطی کو مس کریگا

(۱۸) دو نقاط معینہ معلوم ہین جنکے درمیان ایک تراشِ مخروطی واقع ہوتی ہی اور خط منتظم معلوم ہے تو انکے مطابق جو ماسکہ ہو اوسکا مقام النقاط دریافت کرو

(۱۹) ایک بیضوی کا ماسکہ اور خط منتظم معلوم ہے اور ماسکہ مین ایک خط گذرتا ہی جو خط منتظم سے ایسا زاویہ بناتا ہے جسکی جیب نسبت خارج المرکزی بیضوی کی ہی تو اون نقاط کا مقام النقاط دریافت کرو جسپر یہہ خط مستقیم خط منحنی سے ملتا ہی اور نسبت خارج المرکزی متغیر ہے

(۲۰) تسلسل تراشہاے مخروطی کہیچے گئے ہین اور اونکا ماسکہ اور خط منتظم مشترک ہین اور ہر خط منحنی مین ایک نقطہ مقرر کیا گیا ہی جسکا بعد ماسکہ تبادل معکوس عرض مستقیم کے ساتھہ رکھتا ہے تقام التقاط ان نقطون کا دریافت کرو

(۲۱) دو تراش مخروطی کا ماسکہ مشترک ص ہی جسمین کوئی نصف قطر دائر خطوط منحنی سے تقاطع اور ق پر جدا جدا ملتا ہوا کہچا گیا ہی تو ثابت کرو کہ جو مماس نقاط ع اور ق سے نکالے جائین اونکا نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم ہے

ثابت کرو کہ تراشہاے مخروطی کی خطوط منتظمہ کے تقاطع پر جو خط مستقیم گذرتا ہی اور زاویے جو وہ ان خطون کے ساتھہ بناتا ہی اونکی جیبین نسبت معکوس خارج المرکزی نسبتون سے رکہتی ہین

(۲۲) ایک خط مستقیم بیضوی کو نقاط ع اور عَ پر قطع کرتا ہی اور یہی خط اوس بیضوی کو جو متشابہ اور ہم وضع متحد المرکز بیضوی کی ہے کاٹتا ہی اور نقاط تقاطع مین سے ایک نقطہ ق ہی تو ثابت کرو کہ خط اپنے متوازی حرکت کری تو ع ق . ق عَ مستقل ہوگا

(۲۳) دو خطوط مستقیم ط لہ اور ط ی نقطہ ط پر تقاطع کرتے ہین اونمین ط ا = ط ا ور ط ب = ص مقرر کیے گئے ہین تو ثابت کرو کہ مرکز تمام تراشہاے مخروطی کی جو ان خطون کو ا اور ب پر مس کرین اوس خط مستقیم مین واقع ہین جسکی مساوات یہہ ہے کہ

$$\frac{ط}{ی} = \frac{ص}{لہ}$$

(۲۴) دو متساوی بیضویون کی مرکز منطبق ہین اور اونکی محور ایک دوسرے کے ساتھہ ایک ہی زاویہ پر مائل ہین اونکی اوپر ایک بیضوی کہیچی گئی ہی اور ا اور ب نصف محور اس اوپر کی بیضوی کے ہین اور ط اور ص نصف محور متساوی بیضویون کے ہین اور ۲ ھ اونکی محورون کا زاویہ میلان ہے تو

$$ط^۲ ص^۲ + ا^۲ ب^۲ = (ا^۲ ص^۲ + ب^۲ ط^۲) \text{ جم}^۲ ھ + (ا^۲ ط^۲ + ب^۲ ص^۲) \text{ جب}^۲ ھ$$

اور اسے ثابت کرو کہ دو متساوی بیضویون کے اوپر متشابہ بیضوی کہیچ سکتی ہین

(۲۵) دو متشابہ بیضویان مشترک المرکز ہین اور ایک دوسرے کو مس کرتے ہین اور اونکی طولانی مقادیر کی نسبت ن ہو اور کسی ایک بیضوی مین محور اکبر اور محور اصغر کی نسبت م ہو اور محور ہاے اکبر باہم میلان زاویہ ھ پر ہو تو ثابت کرو کہ

جب ھہ = ن / ا ل

(۲۶) دو مماس (ط اور ص) ایک قریب البیضوی کے ہم نقطہ ع پر تقاطع کرتے ہین اور زاویہ م پر میلان رکھتے ہین تو ثابت کرو کہ بعد مرکز کا ع سے

(ط + ص) قط م/۲ + ۲ ط ص مس م/۲ / ط ص

(۲۷) اگر دو وتر متقاطع علی القوایم کسی نقطہ معینہ سے درجہ دوم کے خط منحنی سے ملین تو ثابت کرو کہ

ا/رر + ا/ر ر

ایک مقدار مستقل ہی ر اور ر ایک وتر کے حصے ہین جو نقطہ معین سے ہوتے ہین اور رَ اور رً دوسرے وتر کے حصے ہین جو اوس نقطہ معین سے ہوتے ہین

(۲۸) اون تمام قریب البیضویون کے نقاط ماسکہ کا مقام النقاط ق = ق ہ [جب رجب رھہ - ر]

ہی جنکی وتر مماس محورونکی ساتھہ زاویہ ھہ پر مائل ہین اور ایک مثلث میں سے ہمیشہ رقبہ مستقل کو قطع کرتے ہین

(۲۹) ایک قریب البیضوی دو محور قائم الزاویہ کے درمیان متحرک ہوتی ہے تو بتاؤ اوسکی ماسکہ کونسا خط مرتسم کریگا

(۳۰) ایک قریب البیضوی دو محور قائم الزاویہ کے درمیان متحرک ہوتی ہی تو بتاؤ اوسکی راس سے کونسا خط منحنی مرتسم ہوگا

(۳۱) متواتر دائرے اسطرح کھیچے گئے ہین کہ ایک اپنی ماقبل کے دائرہ کو باہر کیطرف مس کرتا ہے، اور ہر ایک قریب البیضوی کو دو جگہہ مس کرتا ہی تو ثابت کرو کہ اونکی نصف قطر سلسلہ حسابیہ مین ہونگے جنکا فرق عام عرض مستقیم ہوگا

(۳۲) نظم بضویون کی مساوات موافق قائم الزاویہ محدود بین کے

ط لا^۲ + ۲ س لا ی + ص ی^۲ = ن (ط + ص)

ہے اسمین ط اور ص اور س مقادیر متغیر ہین اور ن مقدار مستقل ہے تو ثابت کرو کہ متوازی الاضلاع جو اسطرح بنائی جاوی کہ اقطار عمودی کا زوج اوس متوازی الاضلاع کے وتر ہون ہمیشہ ایک دائرہ معین کے اوپر کھیچ سکینگے

(۳۳) کسی تراشِ مخروط کے مماس کے ایک نقطہ سے عمود اوس خط پر نکالا جاوے جو ماسکہ اور

نقطہ تماس مین ملے تو ثابت کرو کہ مماس کے اس نقطہ کا بعد خط منتظم سے اوس بعد سی جو موقع عمود اور ماسکہ کے درمیان ہے وہ نسبت رکھیگا جو ا : ی

(۳۴) کسی عرض مستقیم معلوم کے موافق تراشہاے مخروطی مرتسم ہون اور نقطہ ماسکہ سے دو خط مستقیم کہیچے جائین جو اونسکو قطع کرین تو اونکی درمیان جتنی قوسین آئینگی اونکے وتر ایک نقطہ پر گذرینگے ضرورت کی صورت مین وترون کو بڑہانا بہی لو

(۳۵) ایک خط جسکا طول ایک مقدار مستقل ہی اسطرح حرکت کرتا ہی کہ اوسکی انجام دو خطوط معلوم پر رہتے ہین تو جو نقطہ اس خط کو نسبت معلوم مین تقسیم کرتا ہی اونکا مقام النقاط دریافت کرو

(۳۶) کسی تراشِ مخروطی مین اگر ر اور رَ العاد ماسکہ علی القوائم ہون اور ل نصف عرض مستقیم ہو تو

$$\left(\frac{1}{ر}-\frac{1}{ل}\right)^{2}+\frac{1}{ر\,رَ}\cdot\frac{1}{ل}$$ ایک مقدار مستقل ہے

(۳۷) دو تراش مخروطی سب طرح سی آپسمین برابر ہین وہ اسطرح رکہی گئی ہین کہ اونکی محور علی القوائم ہین اور ماسکہ مشترک ص ہے ص ع اور ص ق نصف اقطار دائر ایک دوسرے کے ساتھہ علی القوائم ہین تو نقاط ع اور ق سے مماس نکالے جائین اونکے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو اور جب ص ع ق ایک خط مستقیم ہو تو بہی مقام النقاط دریافت کرو

(۳۸) ص اور ھ ماسکے بیضوی کے ہین اور ص کے مرکز اور ہ کے ماسکہ پر ایک اور بیضوی بنائی گئی ہے جسکا محور اصغر مساوی پہلے بیضوی کے عرض مستقیم کی ہے ال بیضوی کے کسی نقطہ ع سے ص ع ق کہینچو جو دوسرے سے ملے اب مطلوب یہہ ہے کہ ہ ع اور معین ن م کے تقاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۳۹) ا اور ب مرکز دو مساوی دائرون کے ہین اور ا ع اور ب ق ان دائرون کے نصف قطر علی القوائم ہین اگر ا ب = ۲ ا ع ۲ تو خط ع ق ہمیشہ دائرون کے نقاط تقاطع کے ایک نقطہ پر گذرتا ہے

(۴۰) نقاط ع اور ر سے مماس تراش مخروطی کے کہیچے گئے ہین اور ایک اور مماس درمیان کے نقطہ ق سے کہیچا گیا ہے اور وہ مماسون سے نقاط م اور ن پر ملتا ہی تو ثابت کرو کہ زاویہ م ص ن نصف زاویہ ع ص ر کا ہے ص نقطہ ماسکہ ہے

(۴۱) قوس المصفہ ہر دو مماسون کے درمیان کا زاویہ اوس زاویہ سے نصف ہوتا ہے جو وتر مماس کے

محاذی نقطہ ماسکہ پر بنتا ہے

(۴۲) ایک قریب البضوی کے تین مماسوں کے تقاطع سے ایک مثلث بنتا ہی تو ثابت کرو کہ جو دائرہ اس مثلث کے گرد بنیگا وہ نقطہ ماسکہ پر گذریگا

(۴۳) نقطہ ماسکہ اور دو مماس ایک تراش مخروطی کی معلوم ہین تو ثابت کرو کہ وتر تماس نقطہ معین پر گذرتا ہے

(۴۴) بضوی کے محور خورد کو قطر بنا کر ایک دائرہ کھینچا ہی تو جو دائرہ کا مماس ہو اوسکا قطب جو بلحاظ بضوی کے ہو اوسکا مقام النقاط دریافت کرو

(۴۵) قریب البضوی مین دو وتر ماسکہ ع ص ع اور ق ص ق کھینچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ وتر ماسکہ متوازی ع ق کا ع ق ممدودہ سی اوس مماس پر ملیگا جو راس سے نکالا جاوے

(۴۶) اگر قریب البضوی کی راس سے ایک زوج اوتار کی علی القوائم کھینچی جائین اور ان پر ایک سطح قائم الزاویہ کامل بنائی جاوی تو ثابت کرو کہ مقام النقاط آگے کے زاویہ کا ایک اور قریب البضوی ہی

(۴۷) بضوی کے محیط مین نقطہ ع ہی اوسی اوتار علی القوائم ع ق اور ع ر کھینچے گئے ہین تو اوس نقطہ کے محددین کو جنہین ق ر اور عمود المماس کہ نقطہ ع سے کھینچا جاوے تقاطع کرتے ہین نقطہ ع کے محددین کی رقموں مین بیان کرو اور ثابت کرو کہ اگر نقطہ ع بضوی پر متحرک ہو تو یہہ نقطہ تقاطع ایک اور بضوی مرتسم کریگا جسکی مساوات یہہ ہوگی

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ص}^2} = \left(\frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}\right)^2$$

(۴۸) مثلث متساوی الاضلاع کے اوپر جو بعید البضوی متساوی الاضلاع بنائی جاوی اوسکے مرکز کا مقام النقاط وہ دائرہ ہوتا ہی جو اوس مثلث کے اندر بنایا جاوے

(۴۹) دو قریب البضویان متساوی ہین اور اونکی محور اور راس ایک ہی ہین مگر اونکی سمتین مخالف اور اوتار ایک قریب البضوی کے مماس دوسرے قریب البضوی کے ہین تو ثابت کرو کہ مقام النقاط قریب البضوی کے اوتار کے نقاط وسط کا ایک قریب البضوی ہی جسکا عرض مستقیم ایک ثلث قریب البضوی معلوم کے عرض مستقیم کا ہے

(۵۰) ایک قریب البضیوی کی مساوات اون مماسون کے لحاظ سے لی گئی جو زاویہ مر پر مائل ہین

$\left(\frac{ل}{ط}\right)^2 + \frac{ی^2}{ص} = ۱$ ہے تو اوسکے ماسکہ کے محدد ین

$\frac{ط ص}{ط^2 + ص^2 + ۲ ط ص \text{ جم } مر}$ اور $\frac{ط^2 ص}{ط^2 + ص^2 + ۲ ط ص \text{ جم } مر}$ ہین

(۵۱) اگر $ط لا^2 + ۲ ص لا ی + س ی^2 + ۲ ط لا + ۲ س ی + د = ۰$ مساوات قریب البضیوی کی ہو تو محور قریب البضیوی کی مساوات

$$(ط + ص)\left(لا + \frac{ط}{ط + س}\right) + (ص + س)\left(ی + \frac{س}{ط + س}\right) = ۰$$

سے معلوم ہونگے

(۵۲) دو متساوی قریب البضیوں متحد الماسکہ ہین اور اونکی محور علی القوائم ہین اور ایک کا عمود المماس دوسرے کے عمود المماس پر زاویہ قائمہ بناتا ہی تو ثابت کرو کہ ایسی عمود المماسون کے نقطہ تقاطع کا مقام النقاط قریب البضیوی ہے

(۵۳) ایک بضیوی کے دو عمود المماس علی القوائم ہین اونکی تعاطع کا مقام النقاط دریافت کرو

(۵۴) ایک بضیوی کے اقطار مزدوج کے اطراف سے عمود المماس نکالے گئے ہین اونکے تقاطع سے ایک متوازی الاضلاع پیدا ہوتی ہے اگر اقطار مزدوج مین سے ایک کی کسی طرف کی زاویہ خارج المرکز کو برسے تعبیر کرین تو ثابت کرو کہ رقبہ سطح متوازی الاضلاع کا $\frac{۸ (ط^2 - ص^2)^2}{ط ص}$ جب ۲ بر جم ۲ بر ہوگا

(۵۵) ایک مربع معلوم کے چارون کونون پر ایک دائرہ گذرتا ہی اور دوسرے درجہ کے خطوط منحنی بھی گذرتے ہین اور مماس مشترک دائرہ اور ہر ایک خط منحنی کے کہیچے گئے ہین تو مقام النقاط ہر خط منحنی کے نقاط تماس کا جو اوسکی اپنی مماسون کے ساتہہ ہون دریافت کرو

(۵۶) ایک بضیوی سے باہر ایک نقطہ ت ہی اور اوس سے دو مماس ت ع اور ت ق کہیچے گئے ہین تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ ت کے مرکز پر ایسا کہیچ سکتا ہی کہ جو ص ع اور ہ ع اور ص ق اور ہ ق کو مس کرے یا ان خطوط ممدوذہ کو مس کرے

اگر لا اور ی محددین نقطہ ت کے ہون تو ثابت کرو کہ نصف قطر دائرہ کا

۱۶) (ط ک$^2$ + ص$^2$ لا$^2$ − ط ص$^2$)

## پندرہواں باب

### تخصیص طریقہ کتابت

(۳۰۱) پانچ نقطے جن میں سے تین ایک خط مستقیم میں نہیں ہیں تو اون پر گذرتی ہوئی صرف ایک ہی تراش مخروطی کھینچی جا سکتی ہے

فرض کرو کہ پانچ نقطوں میں سے دو نقطوں پر محور لا کا گذرتا ہی اور باقی تین سے دو پر محور ر کا گذرتا ہی اور فرض کرو کہ اول دو نقطوں کے ابعاد مبدء سے ح$_1$ اور ح$_2$ جداگانہ ہین اور دوسرے دو نقطوں کے ابعاد مبدء سے ق$_1$ اور ق$_2$ جداگانہ ہین اور باقی نقطہ کے محددین ح اور ق ہین موافق دفعہ ۲۶۹ کے فرض کرو

$$\text{ط}\,\text{لا}^2 + \text{ص}\,\text{لا}\,\text{ر} + \text{س}\,\text{ر}^2 + \text{د}\,\text{لا} + \text{ی}\,\text{ر} + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

مساوات اوس تراش مخروطی کی جو پانچوں نقطوں پر گذرتی ہے چونکہ یہہ خط منحنی نقاط (ح$_1$ و ۰) و (ح$_2$ و ۰) پر گذرتا ہے تو (۱) یہہ ہوگی

$$\text{ط}\,\text{ح}_1^2 + \text{د}\,\text{ح}_1 + ۱ = ۰ \qquad (۲)$$

$$\text{ط}\,\text{ح}_2^2 + \text{د}\,\text{ح}_2 + ۱ = ۰ \qquad (۳)$$

اور علی ہذا القیاس چونکہ خط منحنی (۰ و ق$_1$) و (۰ و ق$_2$) مین گذرتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{س}\,\text{ق}_1^2 + \text{ی}\,\text{ق}_1 + ۱ = ۰ \qquad (۴)$$

$$\text{س}\,\text{ق}_2^2 + \text{ی}\,\text{ق}_2 + ۱ = ۰ \qquad (۵)$$

اور چونکہ خط (ح و ق) پر گذرتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$\text{ط}\,\text{ح}^2 + \text{ص}\,\text{ح}\,\text{ق} + \text{س}\,\text{ق}^2 + \text{د}\,\text{ح} + \text{ی}\,\text{ق} + ۱ = ۰ \qquad (۶)$$

(۲) اور (۳) سے یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ط} = \frac{۱}{\text{ح}_1\,\text{ح}_2} \quad \text{اور} \quad \text{د} = -\frac{\text{ح}_1 + \text{ح}_2}{\text{ح}_1\,\text{ح}_2}$$

(۴) اور (۵) سے ہمکو دریافت ہوتا ہے کہ

$$\text{س} = \frac{۱}{\text{ق}_1\,\text{ق}_2} \quad \text{اور} \quad \text{ی} = -\frac{\text{ق}_1 + \text{ق}_2}{\text{ق}_1\,\text{ق}_2}$$

پس (۶) سے ہم قیمت ص کی تحقیق کرتے ہین چونکہ کوئی سی تین نقطے ایک خط مستقیم مین نہین ہین تو کوئی مقدار مقادیر ح$_1$ و ح$_2$ و ق$_1$ و ق$_2$ و ح و ق مین صفر نہین ہو سکتے اسلئے معلوم ہوا کہ امثال ط و ص و س و د و ی کی قیمتین محدود ہین اگر ان قیمتون کو (۱) مین رکھین تو ایک مساوات اوس تراش مخروطی کی حاصل ہوگی جو ان پانچ نقطوں پر گذرتی ہے اور چونکہ مقادیر

ط و ص و س و د و ی کی صرف ایک قیمت ہی اسے معلوم ہوا کہ صرف
ایک ہی تراش مخروطی ہے جو ان پانچ نقطون پر گذرتی ہے

(۳۰۲) جب تین نقطے ایک خط مستقیم مین ہون تو یہی دفعہ گذشتہ کی تحقیقات بکار آمد ہو سکتی ہے
مثلاً نقطہ (ح و ق) اوس خط مستقیم پر واقع ہو جو (۰ و ق ۱) و (ح ۱ د) مین ملایا جائے
اس صورت مین نہ بیضوی نہ قریب البضوی نہ بعید البضوی ان نقطون پر گذر ہوئی کہہ سکتی ہین کیونکہ یہہ
خطوط منحنی ایسے مرتسم نہین ہو سکتی کہ ایک خط مستقیم اونکو دو نقطون سے زیادہ نقطون پر تقاطع کرے
بلکہ ہوسکے تراش مخروطی کی تحویل دو خطوط مستقیم کی طرف ہو جائیگی یعنی ایک خط وہ ہوگا جو تین نقاط
مذکور پر گذرتا ہی اور دوسرا خط وہ ہوگا جو باقی دو نقطون پر ملتا ہے لیکن اگر چار نقطے ایک خط مستقیم مین
ہون تو دفعہ گذشتہ کی ترکیب عمل مین نہین آسکتی یہہ ظاہر ہے کہ ایک زوج خطوط مستقیم سے زیادہ پانچ
نقاط پر گذر سکتی ہین

(۳۰۳) اب ہم فائدہ مند صورتین مساوات تراشہای مخروطی کی بیان کرینگے جنمین وہ مثلث کی کونون پر
گذرتی ہین یا اوسکی اضلاع کو مس کرتی ہین

فرض کرو کہ لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ مساواتین تین خطوط مستقیم کی ہون جو آپسمین ملتے ہین
اور مثلث بناتی ہین مساوات

ل مو می + م می لو + ن لو مو = ۰ (۱)

جسمین ل اور م اور ن مقادیر مستقل ہین اوس تراش مخروطی کی ہوگی جو مثلث کے گرد بنائی جای اور
ل اور م اور ن کی مناسب قیمتون مقرر کرنے سے اوپر کی مساوات ہر تراش مخروطی کو تعبیر کرسکتی ہے
جو مثلث کے گرد بنایا جاے اب ہم اسکو ثابت کرتی ہین

اول مساوات (۱) دوم درجہ کی ہے جسمین مقادیر متغیر لا اور ی ہین اور یہہ لا اور ی لو اور
مو اور می کے حملون مین واقع ہوتی ہین اسے ثابت ہوا کہ مساوات (۱) کسی تراش مخروطی کی
مساوات ہی

دوم لا اور ی کی وہ قیمتون سے جو ایک ہی وقت مین مو = ۰ اور می = ۰ کو بناتی ہین شرائط مساوات
(۱) کی پوری ہوتی ہین اسواسطے تراش مخروطی خطوط مو = ۰ اور می = ۰ کے نقطہ تقاطع پر گذرتی ہے

اور اسیطرح تراش مخروطی خطوط می = ۰ اور مو = ۰ کی نقطہ تقاطع پر گذرتی ہی اور لو = ۰ اور مو = ۰ کے نقطہ تقاطع پر بہی گذرتی ہے اسے معلوم ہوا کہ جو تراش مخروطی (۱) سے تعبیر ہوتی ہے اون خطوط کے نقاط تقاطع پر گذرتی ہے جو لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ سے تعبیر ہوتی ہین

سوم ل اور م اور ن کی مناسب قیمتون کی مقرر کرنی سے مساوات (۱) ہر تراش مخروطی کو تعبیر کر سکتی ہے جو مثلث کی گرد بنای جاے اسواسطے کہ فرض کرو ص کسی ایک تراش مخروطی معلوم کو تعبیر کرتی ہے جو مثلث کے گرد بنائی جاے ص پر دو نقطے مقرر کرو جنمین سے ایک نقطہ کے محددین ح۱ اور ق۱ ہون اور دوسرے نقطہ کے محددین ح۲ اور ق۲ ہون اگر ہم اول مساوات (۱) مین بجاے لو اور مو کے ح۱ اور ق۱ رکہین اور پہر ح۲ اور ق۲ رکہین تو ہمکو دو مساواتین حاصل ہونگین جنسے کہ قیمتین م/ل اور ن/ل کی دریافت ہونگین فرض کرو کہ م/ل = ع اور ن/ل = ک ان قیمتون کو مساوات (۱) مین رکہو تو اوسکی صورت یہہ ہو جائیگی کہ

$$\text{مو نو} + \text{ع می لو} + \text{ک لو مو} = \cdot \qquad (۲)$$

پس یہہ مساوات اوس تراش مخروطی کی ہی جو پانچ نقطے مشترک ص کے ساتہہ رکہتی ہی یعنی تین تو مثلث کے کونون کے نقطے اور دو نقطے (ح۱ و ق۱) اور (ح۲ اور ق۲) اسواسطے تراش مخروطی ص بموجب دفعہ ۲۱۳ کے منطبق تراش مخروطی (۲) پر ہونی چاہیے پس اسسے دعوی ہمارا ثابت ہوا

مساوات (۱) مین بجاے مقدار مستقل کے ہم واحد رکہہ سکتی ہین لیکن اور زیادہ صورت بالقرینہ (۱) کی یہہ لیتی ہین کہ

$$\frac{\text{ل}}{\text{لو}} + \frac{\text{م}}{\text{مو}} + \frac{\text{ن}}{\text{می}} = \cdot$$

(۳۰۴) دفعہ گذشتہ کی مساوات (۱) اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

$$\text{می (ل مو + م لو) + ن لو مو} = \cdot$$

اب ہم یہہ دریافت کرینگے کہ (۱) کہان اوس خط مستقیم سے ملتی ہی جسکی مساوات یہہ ہے کہ

$$\text{ل مو + م لو} = \cdot$$

(۲) اور (۱) کو مرکب کر کے ہم کو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ن لو مو = ۰.

اسواسطے یو = ۰ یا مو = ۰

ان فرضوں مین کسی ایک کو لیکر اور مساوات (۲) کو کام مین لائین تو ہم یہہ دیکھتے ہین کہ فرض ثانی بھی قائم رہتا ہی اسے معلوم ہوا کہ خط (۲) خط منحنی (۱) سے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہی یعنی نقطہ تقاطع لو = ۰ اور مو = ۰ پر

اسے معلوم ہوا کہ (۲) مماس (۱) کا اس نقطہ پر ہے اور اسیطرح م می + ن لو = ۰ مماس (۱) کا نقطہ تقاطع می = ۰ اور مو = ۰ پر ہے اور ن یو + ل می = ۰ مماس نقطہ تقاطع لو = ۰ اور می = ۰ پر ہے

(۳۰۵) دفعہ گذشتہ کا اثبات ناقص اور ناتمام ہی اسواسطے کہ بموجب دفعہ ۲۳۱ اور ۲۲۳ کے ایک خط متوازی محور قریب البعضوی کا یا خطوط ممتنع الملاقات بعید البعضوی مین سے کسی ایک خط کا متوازی خط منحنی سے صرف ایک نقطہ پر ملتا ہی مگر اوسکا مماس نہین ہوتا اسواسطے ہمارا دعوی اسطرح ثابت ہوتا ہی کہ محور لا کو منطبق خط لو = پر مقرر کرو تو یو ہو جائیگا ق ی اسمین ق کوئی مقدار مستقل ہے اور محور ی کو بھی منطبق خط مو = ۰ کے ساتھہ مقرر کرو تو مو ہو جائیگا ع لا اسمین ع ایک مقدار مستقل ہی

اور فرض کرو کہ می = ا لا + ب ی + س تو مساوات (۱) دفعہ سابق کی یہہ ہو جائیگی کہ

(ا لا + ب ی + س) (ل ع لا + م ق ی) + ن ع ق لا ی = ۰

اور بموجب دفعہ ۲۸۳ کے مساوات مماس کے مبدء یعنی لا = ۰ اور ی = ۰ کے نقطہ تقاطع پر

ل ع لا + م ق ی = ہی یعنی ل مو + م یو = ۰ اور یہی ثابت کرنا تھا

(۳۰۶) دفعہ ۳۰۴ مین جن مماسون کا بیان ہوا ہے فرض کرو کہ وہ بڑہائے جائین اور خطوط لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = جنسے کہ مثلث بنا ہی ملین تو یہہ ثابت ہو سکتا ہی کہ تینون نقطے تقاطع کے اوس خط مین واقع ہوتے ہین جسکے مساوات یہہ ہے کہ

$$\frac{یو}{ل} + \frac{مو}{م} + \frac{می}{ن} = ۰$$

ہی تراشش مخروطی معینہ کو نہین تعبیر کریگی اگر تین خطوط مستقیم متوازی ہین تو وہ اوس وہ اور ہی کی یہہ صورت ہوگی کہ

ل لا + م ی + ع اور ل لا + م ی + عَ اور ل لا + م ی + عً

اور مساوات کی صورت یہہ ہوجاتی ہے کہ

لر (ل لا + م ی)$^2$ + لب (ل لا + م ی) + مر = ۰

یہہ دو خطوط متوازیہ کو تعبیر کرتی ہے اور اسواسطے کسی تراشش مخروطی معینہ کو نہین تعبیر کرتی سوای

ان مستثنی صورتون کے مسئلہ علی العموم صحیح ہی اب ہم اوسکا اثبات ایک اور طرح سے لکھتے ہین

چونکہ خطوط مستقیم متوازی نہین ہین اسلئے اونمین سے ضرور دو ملینگے فرض کرو کہ یو = ۰ اور یو = ۰

یہہ دو خط ہون اونکی سمتون کو محور ی اور لا جداگانہ مقرر کرو تو = ۰ کی صورت لا = ۰ اور یو = ۰

کی ی = ۰ ہوجائیگی اور نیز ی = ۰ یہی ل لا + م ی + ن = ۰ کے لکھہ سکتی ہین پس اب

ہمکو یہہ ثابت کرنا ہے کہ

ا لا$^2$ + ب ی$^2$ + س (ل لا + م ی + ن)$^2$ + ۲ اَ ی (ل لا + م ی + ن)

+ ۲ بَ لا (ل لا + م ی + ن) + ۲ سَ لا ی = ۰ (۱)

ا اور ب وغیرہ کی مناسب قیمتون کے مقرر ہونے سے کسی تراشش مخروطی معینہ کو یہہ مساوات تعبیر کرتی ہی بشرطیکہ

ط لا$^2$ + ۲ ص لا ی + س ی$^2$ + ۲ د لا + ۲ ی ی + ف = ۰ (۲)

کسی تراشش مخروطی معینہ کی مساوات ہی (۱) مین ارقام کو بالترتیب لکھو اور (۱) اور (۲)

کی امثال متناظر کو مساوی لکھو تو

س ن$^2$ = ف اور اَ ن + س م ن = ی اور بَ ن + س ل ن = د

ب + س م$^2$ + ۲ اَ م = س اور ا + س ل$^2$ + ۲ بَ ل = ط

س ل م + اَ ل + بَ م + سَ = ص

ان مساواتون سے اشتواتر س و اَ و بَ اور ب و ا و سَ تحقیق ہوتے ہین

اور خطوط معلوم ایک نقطہ پر نہین ملتے اسواسطے ن صفر نہین اسے معلوم ہوا کہ قیمتین جو س اور

اَ کی دریافت ہونگین وہ محدود اور معین ہونگین پس (۱) کا (۲) پر منطبق ہونا ثابت

ہوا اور دعوی ہمارا ثابت ہوا

(۳۰۹) مثلث کے اضلاع کو جو تراش مخروطی مس کرے اوسکی مساوات دریافت کرو

فرض کرو کہ لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ مساواتین اضلاع مثلث کی ہون تو ہریک تراش مخروطی اس مساوات سے تعبیر ہوسکتی ہے کہ

$$ا\,لو^{2} + ب\,مو^{2} + س\,می^{2} + 2\,اَ\,مو\,می + 2\,بَ\,می\,لو + 2\,سَ\,لو\,مو = 0 \qquad (1)$$

تراش مخروطی جس مقام پر خط لو = ۰ کو قطع کرتی ہے اوس مقام کے دریافت کرنیکے واسطے لو = ۰ کے رکہین تو مساوات (۱) کی یہہ صورت ہوجایگی کہ

$$ب\,مو^{2} + س\,می^{2} + 2\,اَ\,مو\,می = 0 \qquad (2)$$

اب مساوات (۲) کے حل کرنے سے دو قیمتین $\frac{مو}{می}$ حاصل ہوتی ہین

$\frac{مو}{می} = لب_{1}$ اور $\frac{مو}{می} = لب_{2}$ کی مقرر کرو تو مساوات مو = لب$_{1}$ می اوس خط کی مساوات کو تعبیر کریگی جو نقطہ تقاطع مو = ۰ اور می = ۰ پر گذرتا ہی پس اس سبب سے کہ مساوات (۱) کی شرائط لا اور ر کی اون قیمتون سے پوری ہوتی ہین جو ایک ہی وقت مین لو = ۰ اور مو − لب$_{1}$ می = ۰ بناتی ہین تو اسسے معلوم ہوا کہ تقاطع خطوط لو = ۰ اور مو − لب$_{1}$ می = ۰ ایک نقطہ (۱) پر ہے اور اسیطرح تقاطع لو = ۰ اور مو − لب$_{2}$ می = ۰ کا ایک نقطہ (۱) پر ہے پس اسسے معلوم ہوا کہ خط لو = ۰ (۱) سے دو نقطون پر ملیگا اور اسواسطے وہ مماس نہین ہوگا بشرطیکہ خطوط

مو − لب$_{1}$ می = ۰ اور مو − لب$_{2}$ می = ۰

منطبق ہوتے ہین اسسے معلوم ہوا کہ لو = ۰ مس (۱) کو اوس حالت مین کریگا کہ

لب$_{1}$ = لب$_{2}$ ہو اور اسیواسطے $اَ^{2}$ = ب س

علی ہذا القیاس مو = ۰ (۱) کو اوس حال مین مس کریگا کہ $بَ^{2}$ = س ا اور می = ۰ مس (۱) کو اوس حال مین کریگا کہ $سَ^{2}$ = ا ب ان تین ارتباطات سے ہمکو یہہ دکہائی دیتا ہے کہ علامت ا و ب و س کی مثبت فرض ہوسکتی ہے کیونکہ حاصلضرب ہریک دو کا مثبت ہے اور نیز علامت اَ و بَ اور سَ کی منفی بہی فرض ہوسکتی ہے کیونکہ اگر ہریک اونمین سے منفی ہو تو مساوات (۱) ہریک رقم کی علامت بدل دین اور امثال $لو^{2}$ اور $مو^{2}$ اور $می^{2}$ کو مثبت بنالین اسیواسطے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

ا = ل^۲ اور ب = م^۲ اور س = ن^۲

پس ق = ± م ن اور ک = ± ن ل اور ہ = ± ل م

اسے (۱) کی صورت ہو جائیگی کہ

ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ + ن^۲ می^۲ ± ۲ م ن مو می ± ۲ ن ل می لو ± ۲ ل م لو مو = ۰ (۳)

اس جملہ مین جو علامات مشتبہ واقع ہوتی ہین اب ہم اونکی تحقیقات کرتے ہین

**اول** فرض کرو کہ اوپر کی علامتین لی جائین تو مساوات اسطرح لکھی جائیگی کہ

(ل لو + م مو + ن می)^۲ = ۰

یہہ مساوات ایک خط مستقیم کی ہے یا دو خطوط مستقیم منطبق کی

**دوم** فرض کرو کہ نیچے کی علامت دو دفعہ لی جاوے اور اوپر کی علامت ایک دفعہ تو امین تین حالتین ہونگی

(ل لو + م مو − ن می)^۲ = ۰ یا (ل لو − م مو + ن می)^۲ = ۰

یا (− ل لو + م مو + ن می)^۲ = ۰

ہر ایک مساوات سے دو خطوط مستقیم منطبقہ تعبیر ہوتے ہین

**سوم** چونکہ اول اور دوم صورت خطوط مستقیم کو تعبیر کرتی ہی تو ان صورتون کو مساوات (۳) سے خارج کرین تو یہہ ظاہر ہوگا کہ اگر خط منحنی دوسرے درجہ کا خطوط مستقیم

لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰

کو مس کرتا ہی تو مساوات کی صورت ان صورتون مین سے ایک ہوگی

ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ + ن^۲ می^۲ − ۲ م ن مو می − ۲ ن ل می لو − ۲ ل م لو مو = ۰ (۴)

ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ + ن^۲ می^۲ − ۲ م ن مو می + ۲ ن ل می لو + ۲ ل م لو مو = ۰ (۵)

ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ + ن^۲ می^۲ + ۲ م ن مو می − ۲ ن ل می لو + ۲ ل م لو مو = ۰ (۶)

ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ + ن^۲ می^۲ + ۲ م ن مو می + ۲ ن ل می لو − ۲ ل م لو مو = ۰ (۷)

یہہ چار صورتین اسطرح بہی لکہی جاتی ہین

(۴) سے $\sqrt{\text{ل لو}} + \sqrt{\text{م مو}} + \sqrt{\text{ن می}} = ۰$ (۸)

(۵) سے $\sqrt{-\text{ل لو}} + \sqrt{\text{م مو}} + \sqrt{\text{ن می}} = ۰$ (۹)

(۶) سے $\sqrt{\text{ل لو}} + \sqrt{-\text{م مو}} + \sqrt{\text{ن می}} = ۰$ (۱۰)

(۷) سے $\sqrt{\text{ل لو}} + \sqrt{\text{م مو}} + \sqrt{-\text{ن می}} = ۰$ (۱۱)

عمل انتقال اور مجذور سے یہہ مساواتین ایسی صورت مین لکہی جاتی ہین کہ وہ ناطقہ ہون

(۴۱۰) یہہ دعوی نہایت آسانی سے ثابت ہو سکتا ہی کہ خط منحنی جو مساوات

$\sqrt{\text{ل لو}} + \sqrt{\text{م مو}} + \sqrt{\text{ن می}} = ۰$

سے تعبیر ہوتا ہے خطوط لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ کو تقاطع نہین کرتا اسواسطے کہ فرض کرو کہ اوپر کی مساوات کی شرائط ایک نقطہ کے محددین سے پوری ہوتی ہین تو یہہ محددین ل لو اور م مو اور ن ی کو تمام مثبت یا تمام منفی بنائینگے فرض کرو کہ ل لو مثبت ہی تو لو = ۰ کی دوسری جانب مین جو نقطہ ہوگا اوسکے واسطے جملہ ل لو منفی ہوگا پس محددین ایسی نقطہ کی مساوات کی شرائط کو پورا نہ کرینگی بشرطیکہ دونو م مو اور ن می مین سے ہریک منفی ہی لیکن اگر اگر خط منحنی خط لو = ۰ کو قطع کرتا ہی تو لو = ۰ کے دونو طرف ایسی نقطے خط منحنی پر ہونگے اور پہر یہہ ممکن ہوگا کہ لو کی علامت بغیر لو اور می کی علامت بدلنی کی بدل دین اسے معلوم ہوا کہ خط منحنی خط لو = ۰ کو نہین قطع کر سکتا اور اسیطرح وہ خطوط مو = ۰ اور لو = ۰ کو نہین قطع کر سکتا

اور اسیطرح ثابت ہو سکتا ہی کہ خطوط منحنی معادلات (۹) (۱۰) و (۱۱) دفعہ گذشتہ کی خطوط لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ کو نہین قطع کرتے

(۴۱۱) دفعہ ۹ ۴۰ مین معادلات (۵) و (۶) و (۷) کی صورتین (۴) سے معادیر مستعملہ مین سے ایک علامت بدلکر استخراج ہو سکتی ہین مثلاً (۵) کو (۴) سے اسطرح استخراج کرین کہ علامت ل کی بدل دین

دفعہ آیندہ مین ہم (۴) کا استعمال کرینگے اور اوسکو مساوات تراش مخروطی کی جو اضلاع مثلث کو مس کرتی ہے خیال کرینگے ہم (۵) و (۶) و (۷) مین سے کسی ایک کو کام مین لا سکتے ہین کسی دفعہ آیندہ مین ہم ایک صورت بتلاینگے جسمین یہہ ضرور ہوگا کہ صورتونمین تمیز کرین دفعات ۳۱۴ و ۳۱۵ دیکھیے

(۳۱۲) مساوات (۴) دفعہ ۳۰۹ کو اس طرح لکھہ سکتے ہین

$$(ل یو - م مو)^2 + ن می (ن می - ۲ م مو - ۲ ل یو) = ۰ \quad (۱)$$

اگر ہم اسکو می = ۰ کے ساتھہ شامل کرین تو ہم کو یہہ استنباط ہوگا کہ

$$ل یو - م مو = ۰ \quad (۲)$$

اب ہم معنی اخر مساوات کے بیان کرتے ہین وہ اوس خط کو تعبیر کرتی ہی جو یو = ۰ اور مو = ۰ کے تقاطع مین گذرتا ہی اور اوس نقطہ پر بھی گذرتا ہی کہ جسپر می = ۰ خط منحنی (۱) سے ملتا ہے

دفعہ ۴۰۳ کے طرح یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ

$$ن می - ۲ م مو - ۲ ل یو = ۰ \quad (۳)$$

(۱) کا مماس دوسرے نقطہ پر ہے جسپر (۲) اوسے ملتا ہی

علی ہذا القیاس ہم معنی ان مساواتون کی بیان کرسکتے ہین کہ

$$م مو - ن می = ۰ \quad (۴)$$

$$ل یو - ۲ ن می - ۲ م می = ۰ \quad (۵)$$

$$ن می - ل یو = ۰ \quad (۶)$$

$$م مو - ۲ ل یو - ۲ ن می = ۰ \quad (۷)$$

تقاطع (۳) کا می = ۰ کے ساتھہ اور (۵) کا یو = ۰ کے ساتھہ اور (۷) کا مو = ۰ کے ساتھہ

$$ل یو + م مو + ن می = ۰$$

پر واقع ہوگا

خط ل یو + م مو = ۰ تقاطع یو = ۰ اور مو = ۰ پر گذرتا ہی اور نیز (۳) اور می = ۰ کے تقاطع پر گذرتا ہی اس سبب سے اوسکا مقام معلوم ہوتا ہے

علی ہذا القیاس م مو + ن می = ۰ اور ن می + ل یو = ۰ کے معنی بیان ہوسکتی ہین

(۳۱۳) مثلث کے اوپر جو دائرہ بنایا جاے اوسکی مساوات دریافت کرو

اس دفعہ اور آیندہ کی دو دفعون مین اس صورت کا استعمال آسانی کے واسطے فائدہ مند ہوگا کہ

$$ل جم صہ + ر جیب صہ - ع = ۰$$

... خط مستقیم کی مساوات ... [illegible]
کی ... جداگانہ لکھو دفعہ ... [illegible]

فرض کرو کہ ھ = ۰ اور ب = ۰ اور ا = ۰ مساواتین اضلاع مثلث کی ... [illegible]

ل ب ا + م ا ھ + ن ھ ب = ۰ (۱)

تراش مخروطی کو تعبیر کریگی جو مثلث کے گرد بنائی جاوے اور ل اور م اور ن کی مناسب قیمتون کے
مقرر کرنے سے مساوات کی صورت ایسی بن سکتی ہے کہ وہ اوس دائرہ کو تعبیر کرے جسکو ہم موافق علم
ہندسہ کے مثلث کے گرد بنا سکتے ہین اب ہم اسطرح عمل کرین کہ (۱) مین ھ اور ب اور ا کی بجای اون
جملون کو تعبیر کرتے ہین مندرج کرین اور لا کے امثال کو مساوی صفر کے لکھدین اور لا کے
کے امثال کو برابر ی کے امثال کی لکھین تو ہمکو دو مساواتین ل/ن اور م/ن کی تحقیق کرنیکے واسطے
حاصل ہونگین اور ان قیمتون کے موافق (۱) دائرہ مطلوب کو تعبیر کریگی اسکو طالب علمون کی مشق
کے واسطے چھوڑتے ہین اور ہم ایک اور ترکیب لکھتے ہین

(۱) کے مماس کی مساوات جو ھ = ۰ اور ب = ۰ کے تقاطع سے نکالا جاے
بموجب دفعہ ۲۳۴ کے یہہ ہے کہ

ل ب + م ھ = ۰ (۲)

فرض کرو کہ ا و ب و س اون زاویون کو تعبیر کرتی ہین جو مقابل اضلاع
ھ = ۰ اور ب = ۰ اور ا = ۰ کے جداگانہ واقع ہین بحکم (۳ شکل ۳ م) کے مماس
جو (۲) کو تعبیر کرتا ہی زاویہ ا خط ھ = ۰ کے ساتھہ بنایگا اور زاویہ ب خط ب = ۰
کے ساتھہ فرض کرو کہ مبدء محددین مثلث کے اندر ہے
تو مساوات خط کی جو ھ = ۰ اور ب = ۰ کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہی
اور زاوئے ا اور ب ان خطون کے ساتھہ بناتا ہے یہہ ہے کہ

ھ جب ب + ب جب ا = ۰ (۳)

پس (۲) منطبق (۳) کے ساتھہ ہوتی ہے اسیواسطے

ل/م = جب ا / جب ب

اسیطرح

م/ن = جب ب / جب س

پس مساوات دائرہ کی جو مثلث کے گرد بنایا جاے یہہ ہے کہ

ب لر جب لر + لر صہ جب ب + صہ ب جب ی = ۰

(۳۱۴) مساوات اوس دائرہ کی دریافت کرو جو مثلث کے اندر بنایا جاوے

فرض کرو کہ مبدء محددین مثلث کے اندر واقع ہی تو بموجب دفعہ ۲۸۵ کے تمام نقطون کے واسطے جو دائرہ پر ہون صہ و ب و لر مقادیر منفیہ ہونگین اب مساوات دائرہ کی دفعہ ۲۰۹ کے صور (۸) و (۹) و (۱۰) و (۱۱) مین سے ایک صورت ہوگی

صرف اول صورت یہان کام مین آسکتی ہے یعنی

√ل صہ + √م ب + √ن لر = ۰    (۱)

اور یہہ برابر اسکے ہے کہ

√(− ل صہ) + √(− م ب) + √(− ن لر) = ۰    (۲)

اور صورتین اس سبب سی یہان کام مین نہین آسکتین کہ اون سے ناممکن قیمتین داخل ہوتی ہین

پس اب ہمکو قیمتین ل اور م اور ن کی تحقیق کرنی رہین اگر ہم صہ = ۰ کے (۱) مین رکھین تو حاصل ہوگا ب/لر = ن/م پس ن/م نسبت عمودونکی ہی جو اضلاع ب = ۰ اور لر = ۰ پر جداگانہ اوس نقطہ سے نکالے جائین جہان دائرہ خط صہ = ۰ ملتا ہی فرض کرو کہ نق نصف قطر دائرہ کا ہی تو علم ہندسہ کے موافق عمود جو اس نقطہ سے ب = ۰ پر نکالا جاوے یہہ ہوگا

ل جم ب/۲ جب س یا ۲ نق جم ا/۲ جم س/۲

اور اسے متشابہ جملہ اوس عمود کے واسطے حاصل ہوگا جو لر = ۰ پر نکالا جاوے اسے معلوم ہوا کہ

ن/م = جم² س/۲ ÷ جم² ب/۲

علی ہذا القیاس

ل/ن = جم² ا/۲ ÷ جم² س/۲

اسے معلوم ہوا کہ مساوات مطلوبہ یہہ ہے کہ

جم ا/۲ √صہ + جم ب/۲ √ب + جم س/۲ √لر = ۰

(۳۱۵) مساوات اوس دائرہ کی دریافت کرو جو ایک ضلع اور دو اضلاع ممدودہ کو مس کرے

فرض کرو کہ دائرہ مطلوب زاویہ ا کے مقابل کے ضلع کو اور باقی دو اضلاع ممدودہ کو مس کرے اور مبدء مثلث کے اندر واقع ہو تو ضلع صہ = ۰ اور اضلاع ممدودہ کے درمیان جو نقطے واقع ہوتے ہین اونکے واسطے صہ مثبت اور ب اور لر منفی ہین اسے معلوم ہوا کہ موافق دفعہ ۲۰۹ کے

جو اوسی نقطہ سی باقی مقابل کے اضلاع پر نکالی جاتین

ہم کو اسبات پر بہی توجہ کرنی چاہیئے کہ علم ہندسہ مین جو معنی ذوار بعۃ الاضلاع کی لئی جاتی ہین وہ ہندسہ بالجبر مین وسعت کے ساتہہ لئے جاتے ہین پس اگر چار نقاط معلوم ہون تو ہمکو تین مختلف ذوار بعۃ الاضلاع ان نقطون مین خطوط وصل کرنے سی حاصل ہونگین مثلاً شکل دفعہ ۶۷ کی لو اور فرض کرو کہ ا و ب وس و د نقاط معلوم ہین تو تین مختلف ذوار بعۃ الاضلاع یہہ ہونگین (۱) وہ شکل جو اب اور ب س اور س د اور د ا سے محدود ہین (۲) وہ شکل جو ا س اور س د اور د ب اور ب ا سے محدود ہی (۳) وہ شکل جو ا س اور س ب اور ب د اور د ا سی محدود ہی جو در حقیقت دو مثلثون ح ب س اور ح د ا سے مرکب ہی

علی ہذا القیاس چار خطوط مستقیمہ معلومہ کی تقاطع سے چار مختلف ذوار بعۃ الاضلاع بن سکتی ہین مثلاً دفعہ ۶۷ مین فرض کرو کہ خطوط معلومہ ی و س اور ی ا ب اور ا ح س اور ب ح د ا ہین تو تین مختلف ذوار بعۃ الاضلاع یہہ ہین

(۱) شکل ح ح س اور س ی اور ی ب اور ب ح سی محیط ہین (۲) شکل ح ح د اور د ی اور ی ا اور ا ح سے محیط ہین (۳) شکل جو ا س اور س د اور د ب اور ب ا سے محدود ہین

اگر چار خطون کی مساواتین یہہ ہون کہ

ن = ۰ لو = ۰ مو = ۰ می = ۰

تو چار خطون سے تین مختلف ذوار بعۃ الاضلاع بنینگی اون پر جو تراشہای مخروطی بنائی جائینگی اونکی تین مساواتین یہہ ہونگی کہ

نر لو + ک مو می = ۰ نر مو + ک لو می = ۰ نر می + ک لو مو = ۰

(۳۱۸) اب پہر اس مساوات پر خیال کرتے ہین کہ

لو مو + ک می^۲ = ۰

یہہ اوس تراش مخروطی کو تعبیر کرتاہی جو اوس نقطہ پر گذرتی ہے کہ لو = ۰ اور می = ۰ سے تحقیق ہوتاہی اور نیز اوس نقطہ پر بہی جو مو = ۰ اور می = ۰ سے تحقیق ہوتاہی اور نیز خطوط لو = ۰ اور

مو = ۰ مین سے ہر ایک تراش مخروطی کو جہان سے کہ ملتا ہے مس کرتا ہی اسواسطے کہ اگر ہم لو = ۰ کو اوپر کی مساوات کے ساتہہ شامل کر لین تو ہم دیکھتے ہین کہ می = ۰ ہی یعنی خط لو = ۰ خط منحنی سی ایک نقطہ پر ملتا ہی یعنی اوس نقطہ پر جسپر لو = ۰ اور می = ۰ تقاطع کرتا ہی اور اسیطرح خط مو = ۰ خط منحنی کو مس کرتا ہی پس لو = ۰ اور مو = ۰ تراش مخروطی کے دو مماسونکو تعبیر کرتی ہین اور می = ۰ اونکے وتر تماس کو تعبیر کرتا ہی

اس طریقہ سے بہی ہم ثابت کر سکتے ہین کہ خط لو = ۰ خط منحنی کو نہین قطع کر سکتا اسواسطے کہ خط لو = ۰ کی ایک جانب مین نقاط کے واسطے جملہ لو مثبت ہی اور خط کی دوسری جانب مین منفی لیکن ک می کی علامت متغیر نہین ہوتی پس لو = ۰ خط منحنی کو قطع نہین کر سکتا اوپر کے مساوات کی معنی موافق علم ہندسہ کے یہہ ہین کہ تراش مخروطی کے کسی نقطہ سی جو عمود کہ اوسکی زوج مماسون پر نکالی جائین اوسکی حاصل ضرب کو نسبت بالاستقلال اوس عمود کی مربع سے ہوتی ہی جو اوسی نقطہ سے اون مماسون کے وتر تماس پر نکالا جاوے

(۳۱۹) مساوات ل^۲ لو^۲ + م^۲ مو^۲ = ن^۲ می^۲

تو اسکو اسطرح لکہہ سکتی ہین کہ

(ن می + م مو) (ن می − م مو) = ل^۲ لو^۲

اسے معلوم ہوا کہ موافق دفعہ سابق کے

ن می + م مو = ۰ اور ن می − م مو = ۰

مماس اوس تراش مخروطی کی ہین جو اوس مساوات سے تعبیر ہوتی ہی چونکہ دو مماس مو = ۰ اور می = ۰ کے نقطہ تقاطع پر ملتے ہین اسلئے یہہ نقطہ قطب لو = ۰ کا ہی

اسیطرح مساوات کو اس صورت مین بہی لکہہ سکتے ہین کہ

(ن می + ل لو) (ن می − ل لو) = م^۲ مو^۲

اور اسے نتیجہ یہہ نکلتا ہی کہ لو = ۰ اور می = ۰ کا نقطہ تقاطع قطب مو = ۰ کا ہے

اسے یہہ مستنبط ہوتا ہی کہ نقطہ تقاطع لو = ۰ اور مو = ۰ کا قطب می = ۰ کا ہے دفعہ ۲۹۱ سے

(۳۴۰) یہہ ایک خاص صورت دفعہ گذشتہ کی ہے کہ

حصہ + ب = ن لر دیکھو دفعہ ۲۳۷

فرضکرو کہ خطوط حصہ = ۰ اور ب = ۰ علی القوائم ہون تو حصہ + ب نقطہ (لا د ی) کی بعد کا مجذور ہے اسے معلوم ہوا کہ اوپر کی مساوات اوس تراش مخروطی کو تعبیر کرتی ہی جسکا خط منتظم لو = ۰ اور نقطہ تقاطع حصہ = ۰ اور ب = ۰ کا ماسکہ ہے خطوط

ن لر - حصہ = ۰ اور ن لر + حصہ = ۰

دو مماس تراش مخروطی کے ہین جو اوسکو اطراف وتر ماسکہ ب = ۰ پر مس کرتے ہین اور نیز یہہ خطوط لر = ۰ پر بہی ملتی ہین اسے معلوم ہوا کہ وتر ماسکہ کی اطراف سی جو مماس نکالے جائین وہ اوس ماسکہ کے خط منتظم پر ملتے ہین اور نیز یہہ مماس خط حصہ = ۰ پر بہی ملتے ہین اور یہہ خط بموجب فرض کے عمود ب = ۰ پر ہے اسے معلوم ہوا کہ خط جو ماسکہ اور اون مماسون کے نقطہ تقاطع مین ملایا جاے جو وتر ماسکہ کی اطراف سے نکالین وہ عمود وتر ماسکہ پر ہوتا ہی

(۳۴۱) اگر لو = ۰ اور مو = ۰ مساواتین اون دو تراشہای مخروطی کی ہون جو چار نقطون پر ملتے ہون لو + ل مو = ۰ اوس تراش مخروطی کو تعبیر کریگا جو چارون نقاط تقاطع پر گذرتی ہو اسی قبیل کے دعوون کی اثبات کے بعد اس دعوی کا اثبات ظاہر ہو جایگا

اگر می = ۰ اور میَ = ۰ مساواتین دو خطوط مستقیم کی ہون تو لو + ل می میَ = ۰ اوس تراش مخروطی کی مساوات کو تعبیر کریگی جو اون چار نقطون پر گذرتی ہی جنپر خطوط می = ۰ اور میَ = ۰ تراش مخروطی لو = ۰ سے ملتے ہین اور نیز لو + ل میَ = ۰ اوس تراش مخروطی کو مساوات کو کریگی جو تراش مخروطی لو = ۰ اور خط می = ۰ کے نقاط تقاطع پر گذرتی ہے اس تراش مخروطی کا مماس وہی ہوگا جو تراش مخروطی لو = ۰ کا اوس نقطہ پر مماس ہے جہان لو = ۰ اور می = ۰ تقاطع کرتی ہین ہم پہلے ہی اس نتیجہ کی سوجی ہوئی تہی اور یہہ سوچ یون پیدا ہوا تہا کہ ہم نی مساوات لو + ل می میَ = ۰ کے معنی پر غور کی تہی اور خط میَ = ۰ کا تقرب می = ۰ کی ساتہہ اور پہر اخر کو منطبق ہونا خیال کیا تہا جن لفظون پر لو = ۰ می = ۰ سے ملتا ہے اونہین سے

ایک کو مبدء اور اور خط می = ۰ کو محور لا کا مقرر کرکے ہم اوپر کے مقدمہ کو بخوبی ٹھیک ٹھیک ثابت کر سکتی ہین اسطرح لو کی یہہ صورت ہو جائگی کہ

ا لا۲ + ب لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی

اور بموجب دفعہ ۲۸۳ کے ہم دیکھتے ہین کہ

ا لا۲ + ب لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی = ۰

اور ا لا۲ + ب لا ی + س ی۲ + د لا + ی ی + ل ی۲ = ۰

کا مبدء پر ایک ہی مماس ہے

اور نیز ل کی مناسب قیمت مقرر کرنی سے مساوات لو + ل می۲ = ۰ کو ایسا بنا سکتی ہین کہ وہ اون دو خطوط مستقیم کو تعبیر کرے جو تراش مخروطی لو = ۰ کو اون نقطون پر مس کرتی ہین جہان وہ خط مستقیم می = ۰ کو قطع کرتی ہی یہہ نتیجہ دفعہ ۲۹۳ سی بھی نکل سکتا ہی مساوات می = ۰ مساوی ہے اس مساوات کی ہی کہ

$\frac{لا}{ح} + \frac{ی}{ق} - ۱ = ۰$

اور مساوات لو = ۰ مساوی ہی اس مساوات کی ہے کہ

$\left(\frac{لا}{ح} + \frac{ی}{ق} - ۱\right)^۲ + لب لا ی = ۰$

پس ل = −۱ کے فرض کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ لو + ل می۲ = لب لا ی اور مساوات لا ی = ۰ اون دو مماسون کو تعبیر کرتی ہی جو تراش مخروطی لو = ۰ کو اون نقطون پر مس کرتے ہین جہان اوسکو خط مستقیم می = ۰ کے قطع کرتا ہے

(۳۲۴) پاسکل کا مسئلہ تراش مخروطی کے اندر جو مسدس بنایا جاے اوسکی مقابل اضلاع کے تینون نقاط تقاطع ایک خط مستقیم مین ہونگے

فرض کرو کہ لف = ۰ اور صف = ۰ اور تر = ۰ و لو = ۰ و مر = ۰ و می = ۰

مساواتین اوس مسدس کی اضلاع کی ہون جو تراش مخروطی ص = ۰ مین بنایا جاے

فرض کرو کہ مسدس ایک جدید خط مر = ۰ سی دو ایسی ذو اربعة الاضلاع مین تقسیم کیا جاے کہ جنمین سے ایک کے اضلاع وہ خط ہو جو لف اور صف اور تر اور مر کو برابر صفر کے لکھنے سی حاصل ہا اور دوسرے کے اضلاع وہ خط ہون جو لو و مو و می و مر کو برابر صفر کے لکھنے سی حاصل ہون

اب ہمکو معلوم ہے کہ اگر ط و ص و ل و م خاص مقادیر مستقلہ ہون تو مساوات تراش مخروطی کی ان صورتون مین لکہی جا سکتی ہے کہ

ط صف مر + ص لف بر = ۰ اور ل مو مر + م لو می = ۰

اسیواسطے ط صف مر + ص لف تر اور ل مو مر + م لو می مین سے ہر ایک مطابقہ ص کے ساتہہ ہوگا اسیواسطے

ط صف مر + ص لف تر = ل مو مر + م لو می

∴ (ط صف − ل مو) مر = م لو می − ص لف تر

اب بائین طرف کا رکن مساوات کا ان چار صورتون مین معدوم ہوجاتا ہی جب لو اور لف ایک ہی وقت مین معدوم ہون اور جب لو اور بر ایک ہی وقت مین معدوم ہون اور جب می اور لف ایک ہی وقت مین معدوم ہون اور جب می اور تر ایک ہی وقت مین معدوم ہون اور چونکہ دائین بائین طرف کی ہے ارکان متطابق ہین اسلئے دائین طرف کا رکن بہی ان چارون صورتون مین جانئیے کہ معدوم ہو یعنی اوسکی دو اجزا ضربی مر اور (ط صف − ل مو) مین سے ایک چارون صورتون مین ہر ایک مین معدوم ہو لیکن جو نقطہ لف = ۰ اور می = ۰ تحقیق ہوتا ہی اور جو نقطہ بر = ۰ اور لو = ۰ سے تحقیق ہوتا ہے ان دونو نقطون مین جو خط ملتا ہی اوسکو مر = ۰ کے ازروی عمل کے تعبیر کرتا ہی اسسے ہمکو معلوم ہوتا ہے کہ ط صف − ل مو = ۰ ایک خط ہی جو لو = ۰ اور لف = ۰ کے نقطہ تقاطع اور تر = ۰ اور می = ۰ کے نقطہ تقاطع مین وصل ہوتا ہی لیکن خط صف − ل مو = ۰ بظاہر نقطہ تقاطع صف = ۰ اور مو = ۰ پر گذرتا ہی اسواسطے تین نقطے جو جدا گانہ مساواتون لو = ۰ اور لف = ۰ اور تر = ۰ اور می = ۰ اور صف = ۰ اور مو = ۰ سے معین ہوتے ہین ایک خط مستقیم مین واقع ہوتی ہین

اس بات پر خیال کرنا چاہئے کہ اگرچہ نقطون مین مختلف طریقون سے خطوط وصل کئے جائین تو ساٹھہ شکلین پیدا ہونگین اسکو ذو ستینہ الاضلاع کہینگے پس اگر تراش مخروطی مین چہہ نقطے معلوم ہون تو پاسکل کا ضابطہ ساٹھہ دفعہ استعمال مین آیگا

(۳۲۳) فرضکرو کہ صف = ۰ مساوات ایک تراش مخروطی کی ہو اور

لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰

مساواتین تین خطوط مستقیم کی ہون تو

صف − ل٢ لو٢ = ۰ اور صف − م٢ مو٢ = ۰ اور صف − ن٢ می٢ = ۰

دوسرے درجہ کے خطوط منحنی کو تعبیر کرتے ہین جو تراش مخروطی مفروضہ کو مس کرتی ہین اور لو اور مو اور می اور ل اور م اور ن کو مناسب طور پر منتخب کرکے اخر تین مساواتون میں سے ہر ایک کو تعبیر کر سکتے اوس زوج خطوط کا بنا سکتے ہین جو صف = ۰ کو مس کرین دفعہ ١٦٣ کو دیکھو پس اگر مخروطی

مخروطی صف = ۰ کے گرد مسدس بنایا جاے تو مساواتین

صف − ل٢ لو٢ = ۰ (١) صف − م٢ مو٢ = ۰ (٢) صف − ن٢ می٢ = ۰ (٣)

مسدس کے چھہ اضلاع کو تعبیر کرنیوالی بنا سکتی ہین

اب (١) اور (٢) کو مرکب کرنے سے ہمکو

صف − ل٢ لو٢ − (صف − م٢ مو٢) = ۰ یا (م مو − ل لو) (م مو + ل لو) = ۰ (٤)

اوس زوج خطوط کے واسطے حاصل ہوگا جو (١) اور (٢) کے نقاط تقاطع پر گذرتے ہین

علی ہذا القیاس (ن می − م مو) (ن می + م مو) = ۰ (٥)

اوس زوج خطوط کو تعبیر کرتا ہی جو (٢) اور (٣) کے نقاط تقاطع کے درمیان گذرتا ہی اور

(ل لو − ن می) (ل لو + ن می) = ۰ (٦)

اوس زوج خطوط کو تعبیر کرتا ہے جو (٣) اور (١) کو تعبیر کرتا ہے

چھہ خط جو اسطرح حاصل ہوتی ہین اونکو چار صفون مین اسطرح مرتب کرتے ہین کہ ہر ایک صف مین وہ تین خط آئین جو ایک نقطہ پر ملتے ہین یعنی

م مو − ل لو = ۰ 　 ن م − م مو = ۰ 　 ل لو − ن می = ۰

م مو + ل لو = ۰ 　 ن می + م مو = ۰ 　 ل لو − ن می = ۰

م مو + ل لو = ۰ 　 ن می − م مو = ۰ 　 ل لو + ن می = ۰

م مو − ل لو = ۰ 　 ن م + م مو = ۰ 　 ل لو + ن می = ۰

یہہ نتیجہ مطابق بریخین کے مسئلہ کے مطابق ہے کہ اگر تراش مخروطی کے گرد مسدس بنایا جاے

تو اوسکی تینون وتر جو مقابل کے زاویون مین ملائی جائین ایک نقطہ پر ملینگے
اسواسطے کہ فرض کرو کہ تراش مخروطی کے گرد ایک مسدس بنایا جاوے اور اوسکے کونون کے
نقطے ا و ب و س و د و ی و ف سے تعبیر ہون تو ا و و م و و ی د ل و م د ن مین مناسب
انتخاب کرکے ہم مساوات (۱) کو خطوط اب اور دی کا تعبیر کرنیوالا اور مساوات (۲) کو خطوط
ب س اور ی ف کا تعبیر کرنیوالا اور مساوات (۳) کو خطوط س د اور ف ا کا تعبیر کرنیوالا
بنا سکتے ہین اب ہم اس بات کا امتحان کرتے ہین کہ مساواتین (۴) اور (۵) اور (۶) سی
کونسی خطوط تحقیق ہوتے ہین مساوات (۴) سے وہ دو خط تحقیق ہوتی ہین جو اون خطوط کے
نقاط تقاطع پر گذرتے ہین جو (۱) اور (۲) سے تحقیق ہوتے ہین اور ل اور م کی علامتین
ہماری اختیار مین ہین ہم اونکو ایسا مقرر کرسکتے ہین کہ م مو - ل لو = ۰ خط ب ی کو تعبیر کرے
تو م مو + ل لو = ۰ اوس خط کو تعبیر کریگا جو اب اور ی ف کے نقطہ مشترک اور ب س
اور دی کے نقطہ مشترک مین ملایا جاوے اور علی ہذا القیاس علامت ن کی بہی ہماری اختیار
مین ہے تو ہم اوسکو ایسا مقرر کرسکتے ہین کہ ن می - م مو = ۰ خط س ف کو تعبیر کرے پس
ن می + م مو = ۰ اوس خط کو تعبیر کریگا جو نقطہ مشترک ب س اور ف ا اور نقطہ مشترک
س د اور ی ف مین ملایا جاوے (۶) سے جو دو خط تعبیر ہوتے ہین اونمین سے ایک ا د ہے
اور دوسرا وہ خط ہے جو نقطہ مشترک دی اور ف ا اور نقطہ مشترک س د اور اب مین
ملایا جاوے لیکن یہہ بات ظاہر نہین ہے کہ ہم کسطرح سے اکثر تمیز ان دو خطون کے درمیان کرے
اسواسطے برنجن کا مسئلہ بودا ہے اور اوسکا اثبات خاطرخواہ کامل نہین ہے اسواسطے اس
مسئلہ کا اثبات ایک اور لکھتے ہین جو پاسکل کے مسئلہ سے مستنبط ہوتا ہے
موافق سابق کے فرض کرو کہ مسدس کے کونون کے نقطے ا و ب و س و د و ی و ف سی تعبیر ہوتے ہین
تراش مخروطی اور مماسون اب اور ب س کے نقاط مماس مین خط گذرتا ہوا کہیچو اور تراش
مخروطی اور مماسون دی اور ی ف کے نقاط مماس مین خط گذرتا ہوا کہیچو اور فرض کرو کہ ان

دونوں خطوں مین نقطہ مشترک ع ہی تو ع قطب ب ی کا ہی دفعات ۳۰۴ اور ۱۲۰ و ۲۸۹ کو دیکھو اور اسیطرح سے ہم س ف کا قطب ع ق سے تعبیر ہو اور ا د کا قطب ح ر سے تعبیر ہو تحقیق کر سکتے ہین اور بموجب پاسکل کے مسئلہ کے ع اور ق اور ر ایک خط مستقیم مین واقع ہین اسے معلوم ہوا کہ س ف اور ب ی اور ا د ایک نقطہ پر ملتے ہین یعنی اوس نقطہ پر جو قطب ع ق ر کا ہی دفعہ ۲۹۱ دیکھو جس طالب علم کو زیادہ شوق اس مضمون کے دیکھنے کا ہو وہ سالمن کے تراشہاے مخروطی کے رسالہ کو دیکھے

## مثالین

(۱) اگر ط − س : طَ − سَ : : ص : صَ تو ثابت کرو کہ ایک دائرہ دو تراشہ مخروطی

$$ط لا^2 + ص لا ی + س ی^2 + د لا + ی ی + ف = ۰$$
$$طَ لا^2 + صَ لا ی + سَ ی^2 + دَ لا + یَ ی + فَ = ۰$$

کے نقاط تقاطع پر گذرتا ہوا کھینچ سکتا ہی اور نیز وہ شرایط بھی دریافت کرو کہ ایک قریب البیضوی مبدء پر اور ان دونو تراشہاے مخروطی کے نقاط تقاطع پر بھی گذرے

(۲) دو تراشہای مخروطی کے محور کلان علی القوایم ہین تو ثابت کرو کہ دائرہ اونکے نقاط تقاطع پر گذرتا ہے

(۳) مساواتین دو تراشہاے مخروطی کی یہہ ہین کہ

$$ا لا^2 + ۲ ب لا ی + س ی^2 + ۲ اَ لا = ۰$$
$$ط لا^2 + ۲ ص لا ی + س ی^2 + ۲ طَ لا = ۰$$

تو ثابت کرو کہ خطوط جو اونکے نقاط تقاطع اور مبدء مین ملاے جائین ایک دوسرے پر عمود ہونگے اگر

$$اَ (ا + س) = اَ (ط + س)$$

(۴) ایک بیضوی بعید البیضوی کے ممتنع الملاقات کو مس کرتی ہوئی کھینچی گئی ہی تو ثابت کرو کہ بعید البیضوی اور بیضوی کے نقاط تقاطع مین جو اوتار ملاے جائین اونمین دو متوازی ہونگے

(۵) اگر ھ ب = سَ مساوات بعید البیضوی کی ہو (دفعہ ۲۴۷)

تو ھ ب = ۰ مساوات خطوط ممتنع الملاقات کی اور ھَ − بَ = ۰ مساوات محوروں کی اور ھَ − ن^۲ بَ = ۰ مساوات اقطار مزدوج کی ہے اور ن ایک مقدار مستقل ہے

(۶) ایک مثلث کی زاویون کی جو خطوط تنصیف کرتے ہین وہ مقابل کے اضلاع سی نقاط
ع اور ق اور ر پر جداگانہ ملتی ہین تو جو بیضوی ان نقطون پر مثلث کے اضلاع کو تنصیف کرتی ہوئی
کہیچی جاے اوسکی مساوات دریافت کرو

(۷) ایک نقطہ سے دو خط مستقیم کہیچے گئے ہین ایک اونمین سے محور قریب البضیوی کے ساتھہ زاویہ
ھ پر اور دوسرا زاویہ $\frac{\pi}{2}$ + ھ پر میل رکھتا ہی تو ثابت کرو کہ دوسرے قریب البضیوی چار نقاط
تقاطع پر گذرتی ہے جسکا محور قریب البضیوی معلوم کے محور کے ساتھہ زاویہ ۲ھ پر مائل ہو

(۸) ثابت کرو کہ مساوات تراش مخروطی کی جو نقطہ (ح و ق) پر گذرتا ہی اور قریب البضیوی
ی۲ = ل لا کو راس پر اور عرض مستقیم کے ایک طرف پر مس کرتا ہی یہہ ہے

$$(\text{ی}^2 - \text{ل لا})(\text{ق} - 2\text{ح})^2 = (\text{ی} - 2\text{لا})^2 (\text{ق}^2 - \text{ل ح})$$

اور ثابت کرو کہ یہہ بیضوی ہوگی اگر (ح و ق) اندر قریب البضیوی کے ہو اور بعید البضیوی
ہوگی اگر نقطہ باہر قریب البضیوی سے ہو

(۹) ایک تراش مخروطی مثلث ا ب س کی اضلاع کو نقاط اَ و بَ و سَ پر مس کرتی ہے
اور خطوط مستقیم ا اَ اور ب بَ اور س سَ تراش مخروطی کو اً اور بً اور سً پر
تقاطع کرتے ہین تو ثابت کرو کہ

(۱) خطوط ا اَ اور ب بَ اور س سَ جداگانہ نقاط تقاطع بَ سً اور سَ بً پر
اور سَ اً اور اَ سً پر اور اَ بً اور بَ اً پر گذرتی ہین

(۲) خطوط اَ بَ اور اً بً کے اور بَ سَ اور بً سً کے اور اَ سَ اور اً سً
کے نقاط تقاطع جداگانہ ا ب اور ب س اور س ا پر واقع ہوتے ہین

(۱۰) مثلث ا ب س کے گرد ایک تراش مخروطی بنائی گئی ہی اور خطوط جو اُس مثلث کے
زاویون کی تنصیف کرتی ہین تراش سے نقاط اَ و بَ و سَ پر ملتے ہین اَ ب اور اَ س اور
اَ بَ کی مساوات معلوم کرو

(۱۱) اگر مثلث کے گرد ترا شش مخروطی مرسم ہو اور مثلث کے زاویون کے خطوط منصفۃ کھینچے جائیں تو
مخروطی سے جن نقطون پر ملتے ہیں اونمین خطوط وصل ہون تو مثلث اسطرح پیدا ہوگا اوسکے
اضلاع اصلی مثلث کے اضلاع متناظرہ سے جن نقطون پر تقاطع کرینگے وہ ایک خط مستقیم میں ہونگے

(۱۲) اس مساوات

$$(\frac{ط^۲}{ل^۲} + \frac{ص^۲}{ض^۲} - ۱)(\frac{ط^۲}{ل^۲} + \frac{ص^۲}{ض^۲} - ۱) + ل ب ا ا = ۰$$

کے معنی بیان کرو
چار نقاط معلوم پر گذرتے ہوئے کتنی قریب البضویان کھچ سکتی ہین

(۱۳) اگر بو = ۰ و نو = ۰ و می = ۰ مثلث کے اضلاع کو تعبیر کرین تو ثابت کرو کہ
اضلاع کسی مثلث کے جسکا ہر ایک زاویہ پہلے مثلث کے ہر ایک ضلع پر ہو ودان مساواتون سے
تعبیر ہونگے

$$بو + ن مو + \frac{می}{م} = ۰ \quad اور \quad \frac{لو}{ل} + مو + ل می = ۰ \quad و \quad م لو + \frac{نو}{ن} + می = ۰$$

اسمین ل اور م اور ن مقادیر مستقل ہین
ل اور م اور ن کے وہ ارتباط دریافت کرو کہ جسکی سبب سے مثلثون کے زوایا متناظر مین خطوط وصل کیے گئے

(۱۴) ایک دائرہ اور قائم الزاویہ بعید البضوی چار نقطون پر تقاطع کرتی ہین اور اونکے اوتار مشترک مین
سے ایک وتر قطر بعید البضوی کا ہی تو ثابت کرو کہ دوسرا وتر مشترک قطر دائرہ کا ہوگا

(۱۵) ایک بضوی کا محور اکبر اس اا ہی اور اس محور اکبر پر جو دائرہ بنایا جاے اوسکی محیط میں
ایک نقطہ ع ہی اور اع اور اَع بضوی سے نقاط ق اور قَ پر ملتی ہین تو ثابت کرو کہ مساوات
ق قَ کی

$$(ط^۲ + ص^۲)\ ر\ جب\ ر + ۲\ ص\ جا\ لاجم\ ر - ۲\ ط\ ص = ۰$$

ہی بضوی کی مساوات کے محور بضوی کے محور میں اور زاویہ ا س ع ہے
اگر نقطہ ع کا سمیت ق قَ سے نقطہ ر پہ ملے تو مقام التقاط ر کا بضوی ہوگا

(۱۶) جو نقطہ ایسا ہو کہ اگر او سے عمود مثلث کے اضلاع معلوم پر نکالین تو اونکے مربعون کا مجموعہ
ایک مقدار مستقل ہو تو اوسکا مقام التقاط ایک بضوی ہوگی
اور اگر مقدار مستقل ایسی مقرر کیجائی کہ زاویہ ا کے مقابل کے ضلع کو بضوی نقطہ د پر مس کری تو

س د : ب د : : ص ا : س ا

(۱۷) دفعہ ۳۱۲ کے طریقہ کتابت کو اختیار کرکے ثابت کروکہ مساوات خط کی جو نقطہ س پر گذرنے اور مرکز دائرہ ہو تو

ھہ جب = ب جم ا

(۱۸) دفعہ ۳۱۳ مین فرض کروکہ د نقطہ وسطا قوس اب کا ہی تو مساواتین ب د اور ا د کی جداگانہ یہہ ہو گی کہ

ھہ جب س + لر (جب ا + جب ب) = ۰

ب حب س + لر (حب ا + جب ب) = ۰

(۱۹) دفعہ ۳۰۹ کی مساوات (۴) مین اگر ا و ب و س نقاط تماس مثلث اور تراش مخروطی کے ہون تو ثابت کروکہ مساوات ا ب کی

ل لو + م نو − ن می = ۰ ہی

(۲۰) دفعہ ۲۹۲ کی شکل مین فرض کروکہ لو = ۰ مساوات اس کی او رمو = ۰ مساوات ب د کی اور می = ۰ مساوات ی ف کی اور

ل ا لو ا + م ا مو ا − ن ا می ا = ۰

مساوات اوس تراش مخروطی کی ہو جو نقاط ا و ب و س و د پر گذرتی ہو تو ا و ب و س و د سے مماس نکالے جائین اونکی مساواتین دریافت کرو اور نیز مساواتین اب و ب س اور د ا کی دریافت کرو اور یہہ ثابت کرو کہ خط ق ح او ن مماسون کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہے جو ا اور ب سے نکالے جائین اور نقاط س اور د سے نکالے جائین

(۲۱) وہ شرط دریافت کروکہ خط

کر لو + لب مو + مر می = ۰

تراش مخروطی

ل ا لو + م ا مو + ن ا می = ۰ کو مس کرے

(۲۲) دفعہ ۳۰۴ کی مساوات (۱) کے معنی از روی علم ہندسہ بیان کرو اور ثابت کروکہ وہ ایک خاص صورت شکل نظری دفعہ ۳۱۷ کی ہے

(۲۳) دفعہ ۳۱۳ کی اخر مساوات کی معنی بیان کرو اور اس شکل نظری کا استنباط کرو کہ اگر مثلث کے دائرہ بیرونی کے کسی نقطہ سے مثلث کے اضلاع پر عمود نکالے جائین تو مواقع عمود ایک خط مستقیم مین ہونگے

(۲۴) اگر مثلث کے اندر بیضویان کھیچی جائین جنمین سے ہر یک کا اسکہ ایک خط مستقیم معین مین ہو

تو دوسری مسئلہ کا مقام النقاط مثلث کے کونون کے نقاط پر گذریگا

(۲۵) تین تراشِ مخروطی ایک مثلث کے دو دو ضلعونکو ان نقطون پر جہان دو دو ضلعی تیسرے ضلع سے ملتے ہین مس کرتے ہوئے کہیچے گئے ہین اور مثلث کے دائرہ اندرونی مرکز ہر اونمین سے ہر ایک گذرتی ہے تو ثابت کرو کہ اونکے نقطہ مشترک سے جو تین مماس نکالیں وہ اضلاع مثلث سے جو جداگانہ اپنی تراشِ مخروطی کو تین نقاط پر جو ایک خطِ مستقیم مین قطع کرتی ہین اور یہہ بہی ثابت کرو کہ مماس مشترک ہر زوج تراش مخروطی کی اوس مثلث کے اضلاع کو نقاطع کرتے ہین جو ایک ازواج تراش کو تین نقاط مذکور پر مس کرتا ہی

(۲۶) مثلث ا ب س کے کونون کے نقطون کو مرکز بناکر اور اضلاع کو ممتنع الملاقات مقرر کرکے تین بعید البضویان کہچی گئی ہین اور اَ دَ بَ دَ سَ اونکی راس جداگانہ ہین

اگر ا اَ جب $\frac{ا}{۲}$ = ب بَ جب $\frac{ب}{۲}$ = س سَ جب $\frac{س}{۲}$ تو ثابت کرو کہ

نقاط تقاطع ہر زوج بعید البضوی کی تیسری بعید البضوی کے محور پر واقع ہین

(۲۷) مساوات ل ھہ + م ب + ن لر = ۰ قائم الزاویہ بعید البضوی کی تعبیر کرنیکے واسطے یہہ شرط ضروری اور کافی ہے کہ ل + م + ن = ۰

(۲۸) ثابت کرو کہ $\sqrt{(ل ھہ)}$ + $\sqrt{(م ب)}$ + $\sqrt{(ن لر)}$ = ۰ اگر بضوی کو تعبیر کریگی اگر

ل م ن ( $\frac{ل}{طب}$ + $\frac{م}{طب}$ + $\frac{ن}{طس}$ )

مثبت ہو اور قریب البضوی کو تعبیر کریگی اگر یہہ صفر ہو اور بعید البضوی کو تعبیر کریگی اگر یہہ جملہ منفی ہو اور اسمیں طا و طب و طس اضلاع مثلث کے ہین جو ان مساواتون

ھہ = ۰ و ب = ۰ و لر = ۰ سے نبتی ہین

(۲۹) ثابت کرو کہ ل ب لر + م لر ھہ + ن ھہ ب = ۰ اگر بضوی کو تعبیر کریگی

اگر ل^۲ طا^۲ + م^۲ طب^۲ + ن^۲ طس^۲ − ۲ ل م طا طب − ۲ م ن طب طس − ۲ ن ل طس طا منفی ہو اور قریب البضوی کو تعبیر کریگی اگر یہہ جملہ صفر ہو اور بعید البضوی کو تعبیر کریگی

اگر یہہ جملہ ثبت ہو

(۳۰) وہ شرط دریافت کرو کہ جسی خط

لر لو + لب مو + مر می = ۰

اس تراش مخروطی ل لو۲ + م مو۲ + ن می۲ = ۰

کو مس کرے

(۳۱) ان تراشہای مخروطی

ل مومی + م می لو + ن لومو = ۰

اور لَ مومی + مَ می لو + نَ لومو = ۰

چوتہا نقطہ تقاطع دریافت کرو

(۳۲) مثلث کے اندر اور باہر جو دائرے بنائی جائین اونکی محور اصلی کی مساوات یہہ ہے کہ

ھ قم اجم ا/۲ + ب قم ب جم ب/۲ + لر قم س جم س/۲ = ۰

(۳۳) خط منحنی ل ب لر + م لر ھ + ن ھ ب = ۰

کی قطر کی مساوات دریافت کرو جو خطوط ب = ۰ اور لر = ۰ کی نقطہ تقاطع کے درمیان گزرے

(۳۴) اس خط منحنی

√(ل ھ) + √(م ب) + √(ن لر) = ۰

کے مماس کی مساوات دریافت کرو اور اسے ثابت کرو کہ مرکز خط منحنی اس مساوات سی متعین ہوتا ہے کہ

ھ / (م طس + ن طب) = ب / (لر طا + ل طس) = لر / (ل طب + م طا)

(۳۵) نقطہ ع سے دو مماس ایک تراش مخروطی کے نکالی گئی ہین اور وہ اوسے جدا جدا نقاط م اور ن پر ملتے ہین خط ع سے کہچا گیا زاویہ م ع ن کی تنصیف کرتا ہی وتر م ن سے ق پر ملتا ہے اور کوئی وتر تراش مخروطی کا ق سے کہچا گیا ہے تو ثابت کرو کہ جن حصون مین یہہ وتر نقطہ ق پر تقسیم ہوتا ہی اونکی محاذی نقطہ ع پر مساوی زاوئے ہین

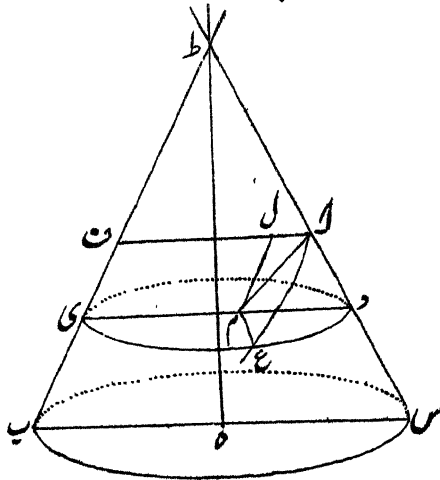
## سولہواں باب

### تراشہاء مخروطی نسبت غیر موسیقیہ اور مربع موسیقیہ

### تراشہای مخروطی

(۳۲۴) اب ہم یہہ بیان کرینگی کہ جن خطوط کا نام ہم نے تراش مخروطی رکہا ہی وہ مخروط اور

ایک سطح مستوی کے تقاطع سے پیدا ہوتی ہین

**حد** مخروط وہ شکل مجسمہ ہے جو مثلث قائم الزاویہ کے اضلاع قائمہ مین سے کسی ایک ضلع کو ساکن رکھکر
اوسپر مثلث قائم الزاویہ کو پورا چکر دینے سے پیدا ہو خط ساکن کو محور مخروط کہتے ہین

فرض کرو کہ ط ہ ساکن ضلع اور مثلث قائم الزاویہ ط ہ س گرد ط ہ کے پورا چکر لگاتا ہی اب علم ہندسہ ترکیبی کے
موافق مخروط کے بنانے مین خط ط س کو محدود گنتے ہین لیکن ہندسہ تحلیلہ مین س ط کو دو طرف غیر متناہی
کہینچ لیتے ہین ط ہ اور ط س مین جو ایک سطح مستوی کے گذرنے سے تراشش مخروطی پیدا ہو وہ مخروط
کے خط ط ب پر ملینگے اور یہہ ط ب مقام ط س کا اوسوقت ہوتا ہی کہ مثلث قائم الزاویہ آدہا چکر
اپنا پورا کرتا ہی اب فرض کرو کہ تراشش مخروطی اس طرح پیدا ہو کہ سطح مستوی جو عمود سطح ب د س پر
ہو مخروط کو تراشے اور یہہ تراشش ل ع ہو اور وہ نقطہ ہی جہان سطح متقاصل ط س سے ملتی ہی
اب ہم اس خط منحنی ل ع کی ذات اور صفات دریافت کرتے ہین فرض کرو کہ ایک سطح خط منحنی
کے کسی نقطہ ع پر گذرتی ہوئی عمود محور ط ہ پر ہو تو ظاہر معلوم ہوتا ہے کہ یہہ سطح مخروط سے دائرہ
د ع ی پر ملیگی جسکا قطر د ی سطح ب ط س مین ہوگا فرض کرو کہ م ع وہ خط ہی جسپر سطح دائرہ
وہ سطح ملتی ہے جسپر ہم بحث کر رہے ہین اور م خط د ی مین ہے چونکہ ہر ایک سطح جو م ع پر قطع
ہوتی ہے عمود سطح ب ط س پر ہے اسلئے م ع عمود اوس سطح پر ہی اور اسیواسطے جو

خط اوس سطح مین ہو اوسپر عمود ہے

اف متوازی ی د کا اور م ل متوازی ط ب کا کھچو اور ام = لا اور م ع = ک

اور ط ا = س اور ہ ط س = ھ اور ط ام = ر فرض کرو زاویہ ام ل برابر ام

اور ط ب کے زاویہ میلان یعنی ک - ر - ۲ ھ کے ہی

اب $\frac{\text{م د}}{\text{م ا}} = \frac{\text{جب م ا د}}{\text{جب م د ا}} = \frac{\text{جب ر}}{\text{جم ھ}}$ ∴ م د = $\frac{\text{لا جب ر}}{\text{جم ھ}}$

ی م = ف ل = ف ا - ا ل = ۲ س جب ھ - ا ل

$\frac{\text{ا ل}}{\text{ا م}} = \frac{\text{جب ا م ل}}{\text{جب ا ل م}} = \frac{\text{جب (ک - ر - ۲ ھ)}}{\text{جب (ک/۲ + ھ)}}$

∴ ا ل = $\frac{\text{لا جب (ر + ۲ ھ)}}{\text{جم ھ}}$

∴ ی م = ۲ س جب ھ - $\frac{\text{لا جب (ر + ۲ ھ)}}{\text{جم ھ}}$

لیکن دائرہ کی خاصیت کے موافق م ع² = ی م . م د

∴ ک² = $\frac{\text{لا جب ر}}{\text{جم ھ}}$ [ ۲ س جب ھ - $\frac{\text{لا جب (ر + ۲ ھ)}}{\text{جم ھ}}$ ]

اب اگر اس مساوات اور دفعہ ۲۸۲ کی مساوات کا آپسمین مقابلہ کرین تو یہہ دریافت ہو گا کہ

اگر - $\frac{\text{جب ر جب (ر + ۲ ھ)}}{\text{جم ھ}}$ منفی ہے تو تراش بیضوی ہے

اور اگر مثبت ہی تو تراش بعید البیضوی اور اگر صفر ہی تو قریب البیضوی یعنی اگر ک سے ر + ۲ ھ

چھوٹا ہے تو بیضوی ہے اور اگر بڑا ہے تو بعید البیضوی اور اگر برابر ہے تو قریب البیضوی ہے

اسے معلوم ہوا کہ اگر ام متوازی ط ب کا ہو تو تراش قریب البیضوی ہی اور اگر ام خارج کیا گیا

م کی طرف سی ط ب سے ملتا ہی تو تراش بیضوی ہی اور اگر ام خارج کیا گیا ا کی طرف سے

ط ب سی جو ط کی طرف خارج کیا جای ملتا ہی تو تراش بعید البیضوی ہے

اگر س = ۰ تو تراش ایک نقطہ ہے اگر ر + ۲ ھ چھوٹا ک سے ہے تو خط

مستقیم ہے اگر ر + ۲ ھ بڑا ک سی ہو تو تراش دو خطوط منتظم ہین اور

اگر ر + ۲ ھ = ک تو تراش ایک خط مستقیم ہے

مساوات جو اوپر حاصل ہوئی ہی وہ اسطرح لکھی جا سکتی ہے کہ

$$\text{ی}^2 = \frac{\text{ح}\ \text{رح}\ (\text{ر}+2\text{هه})}{\text{حم}^2\ \text{هه}} \left[ \frac{2\ \text{س}\ \text{ح}\ \text{هه}\ \text{حم}\ \text{هه}}{\text{حب}\ (\text{ر}+2\text{هه})}\ \text{لا} - \text{لا}^2 \right]$$

فرض کرو کہ ر + ۲ هه چہوٹا ۱۸۰ سے ہو تو خط منحنی ایک بیضوی ہوگا اب اس مساوات اور مساوات

$$\text{ی}^2 = \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} (2\,\text{ط}\ \text{لا} - \text{لا}^2)$$

کو باہم مقابلہ کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$2\,\text{ط} = \frac{2\ \text{س}\ \text{ح}\ \text{هه}\ \text{جم}\ \text{هه}}{\text{حب}\ (\text{ر}+2\text{هه})} \qquad \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} = \frac{\text{ح}\ \text{رحب}\ (\text{ر}+2\text{هه})}{\text{حم}^2\ \text{هه}}$$

$$\text{پس}\ 2\,\text{ط} = \frac{\text{س}\ \text{ح}\ 2\text{هه}}{\text{ح}\ (\text{ر}+2\text{هه})} \quad \text{و}\ \text{ص}^2 = \frac{\text{س}^2\ \text{ح}^2\ \text{هه}\ \text{ح}\ \text{ر}}{\text{ح}\ (\text{ر}+2\text{هه})}$$

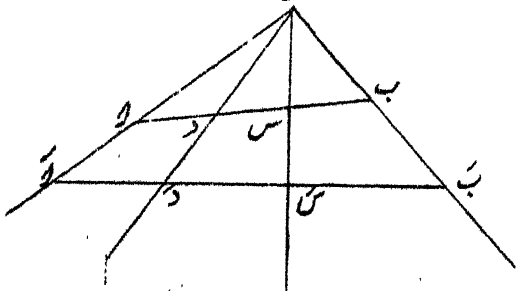
$$\text{اور نیز}\ \text{ی} = 1 - \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} = \frac{\text{حم}^2\ \text{هه} - [\text{ح}^2(\text{ر}+\text{هه}) - \text{ح}^2\ \text{هه}]}{\text{حم}^2\ \text{هه}} = \frac{\text{حم}^2(\text{ر}+\text{هه})}{\text{حم}^2\ \text{هه}}$$

دفعہ ۳۴۴ کی شکل میں اگر فرض کرین کہ ا م محدودہ مخروطی سے نقطہ ا پر ملتا ہی تو ۲ ط = اا̄ ہوگا اور یہہ ہی ہمنے پہلے سے سوچا تہا اور ص اوسط فی النسبت اون عمودون میں ثابت ہوتا جو ا اور ا̄ سے محورطہ پر لگائے جائین اور اسکے متماثل نتیجے حاصل ہو سکتے ہین اگر خط منحنی بعید البیضوی ہو

## نسبت غیر موسیقیہ اور مزبر موسیقیہ

(۳۴۵) اب ہم مختصر حال نسبت غیر موسیقیہ کا اور مزبر موسیقیہ کا لکہتے ہین تحقیقات تراشہائے مخروطی مین وہ اکثر بکار آمد ہوتی ہین

فرض کرو کہ چار خطوط مستقیم ایک نقطہ پر ملتے ہین تو اگر کوئی خط مستقیم ا د س ب اس نظم کو کاٹتا ہوا کہینچا جاوے تو

$$\frac{\text{اب}}{\text{اس}} \div \frac{\text{دب}}{\text{دس}}\ \text{ایک نسبت بالاستقلال ہوگی}$$

فرض کرو کہ ط ایک نقطہ ہو جہان یہہ خطوط سے ملتے ہین تو

$$\frac{\text{جب اطب}}{\text{جب ابط}} = \frac{\text{اب}}{\text{اط}}$$

$$\frac{\text{جب اطس}}{\text{جب اسط}} = \frac{\text{اس}}{\text{اط}}$$

$$\frac{\text{جب اسط}}{\text{جب ابط}} \cdot \frac{\text{جب اطب}}{\text{جب اطس}} = \frac{\text{اب}}{\text{اس}}$$

علی ہذا القیاس

$$\frac{\text{جب دسط}}{\text{جب دبط}} \cdot \frac{\text{جب دطب}}{\text{جب دطس}} = \frac{\text{دب}}{\text{دس}}$$

$$\frac{\text{جب دطب}}{\text{جب دطس}} \div \frac{\text{جب اطب}}{\text{جب اطس}} = \frac{\text{دب}}{\text{دس}} \cdot \frac{\text{اب}}{\text{اس}} \quad \therefore$$

اب فرض کرو کہ کوئی اور خط مستقیم اَ دَ بَ نظم مذکور کا کاٹتا ہوا کھچا گیا ہی تو اس سبب سی کہ زاویے اطب اور اَطبَ ایک ہین اور زاویون کی بھی یہی کیفیت ہی

$$\frac{\text{دَبَ}}{\text{دَسَ}} \div \frac{\text{اَبَ}}{\text{اَسَ}} = \frac{\text{دب}}{\text{دس}} \div \frac{\text{اب}}{\text{اس}}$$

اسسے دعوی ثابت ہے

اسیطرح ہم ثابت کرسکتے ہین کہ ہر ایک نسب ذیل مین سے نسبت بالاستقلال ہی

$$\frac{\text{بس}}{\text{بد}} \div \frac{\text{اس}}{\text{اد}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{سب}}{\text{سد}} \cdot \frac{\text{اب}}{\text{اد}}$$

(۳۳۶) **حدود** چار خط جو ایک نقطہ پر ملتے ہین اوسی مزبر کہتے ہین اور جو خط مزبر کو قطع کرتا ہوا کھچا گیا ہے اوسے خط متقاطع کہتے ہین

نسب بالاستقلال $\frac{\text{اب}}{\text{اس}} \div \frac{\text{دب}}{\text{دس}}$ و $\frac{\text{اب}}{\text{اد}} \div \frac{\text{سب}}{\text{سد}}$ و $\frac{\text{اس}}{\text{اد}} \div \frac{\text{بس}}{\text{بد}}$ مین سے ہر ایک کو مزبر کی نسبت غیر موسیقیہ کہتے ہین

اگر اب . دس = ا س . ب س یعنی اگر سطح کل خط (اب) اور حصہ متوسط (دس) کے برابر سطح اور دو حصون (اد) اور (بس) کے ہو تو مزبر کو موسیقیہ کہتے ہین

(۳۳۷) مزبر موسیقیہ کی وجہ تسمیہ یہہ ہے کہ وہ خط متقاطع کو نسبت موسیقیہ مین تقسیم کرتی ہی

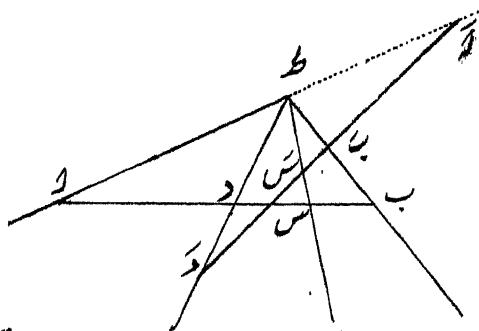
اسواسطے کہ اب . دس = اد . بس

$$\frac{\text{بس}}{\text{دس}} = \frac{\text{اب}}{\text{اد}}$$

یعنی اگر ہم اب اور اس اور اد کو اول اور دوسرے اور تیسرے مقدار قرار دین تو اول کو تیسرے سے وہ نسبت ہوگی جو اول اور دوم کے تفاوت کو نسبت دوسرے اور تیسرے کی تفاوت سے ہے

جب مزبر موسیقیہ ہو تو مزبر کی نسب بالاستقلال مین سے ایک نسبت برابر واحد کے ہوگی ہم بعض اوقات مزبر کی نسب غیر موسیقیہ مین سے ایک کو منتخب کرینگے اور ساری اپنی توجہ اوسی کی طرف صرف کرینگے اور اس نسبت منتخب کو مزبر کی نسبت غیر موسیقیہ کہینگے

(۳۲۸) فرض کرو کہ طا وطب وطس وطد ایک مزبر موسیقیہ بناتے ہون نتائج
اب اگر ہم مبدء جدید طَ قرار دین اور طَا طَب طَس طَد ملائین تو یہہ چارون خطوط مزبر جدید بنائینگے
اسواسطے کہ خط متقاطع اب س د کی نسبت موسیقی مین تقسیم ہوا ہے

(۳۲۹) مزبر کی نسبت غیر موسیقیہ مین کچھہ تبدل نہین واقع ہوتا اگر خط متقاطع بجای خطوط کے قطع کرنیکے ان خطوں کو اوس حال مین قطع کرے کہ وہ بڑہائے جائین

فرض کرو کہ طا وطب وطس وطد ایک مزبر ہے اور اَ بَ سَ دَ خط متقاطع مزبر کے تین خطوں سے اور چوتھی خط اط ممدودہ سے اوسی ملتا ہے زاویے اَطب اور اطب تکملہ ایک دوسرے کے ہین اوسے اطد اور اَطد ہین اور علی ہذا القیاس اسے معلوم ہوا کہ نسبت جدید اب س د پر بنتی ہے وہ برابر اوس نسبت موسیقیہ کے ہے جو متناظر اوسکے اَ بَ سَ دَ پر بنتی ہے

(۳۳۰) فرض کرو کہ اب . س د = اد . ب س بس طا وطب وطس وطد مزبر موسیقیہ بناتے ہین تو بموجب اخر دعوی کے

$$\frac{اَ بَ}{اَ دَ} \div \frac{سَ بَ}{سَ دَ} = \frac{اب}{اد} \div \frac{س ب}{س د} = ١$$

∴ طاَ و طبَ و طسَ و طدَ مزبر موسیقیہ بناتے ہین

علی ہذا القیاس طس و طب و طا اور دا خارج کیا گیا طا کی طرف ایک مزبر موسیقیہ بنائینگے پس ایک مزبر موسیقیہ کے خطوں کے کہنچنے سے چار مزبر موسیقیہ حاصل ہونگے

(۳۳۱) جس خط کی مساواتین ھ = ۰ و ب = ۰ و ھ - ک ب = ۰ اور ھ + ک ب = ۰ ہین اونسی مزبر موسیقیہ بنتا ہے

فرض کرو کہ طم خط ھ = ۰ ہے
طن ب = ۰ ہے
طع ھ - ک ب = ۰ ہے
طق ھ + ک ب = ۰ ہے

فرض کرو کہ خط متقاطع مزبر کا م ع ن ق ہے تو موجب دفعہ ۲۷ کے

(جب ع طم) / (جب ع طن) = ک = (جب ق طم) / (جب ق طن)

∴ (جب ع طم) / (جب ع طن) . (جب ق طن) / (جب ق طم) = ۱

∴ دفعہ ۳۲۵ کی طرح (ع م) / (ع ن) . (ق ن) / (ق م) = ۱

∴ ع م . ق ن = ع ن . ق م

یہی نتیجہ حاصل ہوگا اگر ہم خط متقاطع کو کسی اور مقام پر کہینچین مزبر موسیقیہ اسطرح بنا ہے کہ اوسکے خارجی خطوط مین سے ہمیشہ ایک خط ان دو ھ = ۰ اور ب = ۰ مین سے ہوتا ہی اور ایک خط ان دو خطوط ھ - ک ب = ۰ اور ھ + ک ب = ۰

(۳۳۲) نسبت غیر موسیقیه چار خطوط ده = ۰ اور ب = ۰ اور ده − ک ب = ۰ و ده + ک ب = ۰ کی ک² ہے

اسواسطے کہ موافق دفعہ گزشتہ کے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

جا ع ط م / جا ع ط ن = ک، و جا ق ط م / جا ق ط ن = − ک

اسواسطے موجب دفعہ ۳۲۶ کے ک² نسبت غیر موسیقیہ کو تعبیر کرتی ہے

(۳۳۳) اگر مساواتین خطونکی لو = ۰ و مر = ۰ و لو − ک لو = ۰ اور لو + ک مو = ۰ ہون تو بہی دفعہ ۳۳۱ ثابت ہی اسواسطی کہ بموجب دفعہ ۷۵ کے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

لو = لر ده و مو = لب ب اسمین لر اور لب مقادیر مستقلہ ہین ایسی معلوم ہوا کہ مساواتین لو − ک مو = ۰ اور لو + ک مو = ۰ اسطرح لکہی جاتی ہین کہ

لر ده − ک لب ب = ۰ اور لر ده + ک لب ب = ۰ یا ده − کَ ب = ۰ اور ده + کَ ب = ۰ اسمین کَ = ک لب / لر اسے معلوم ہوا کہ دفعہ ۳۳۱ کام مین لا سکتے ہین

(۳۳۴) چار خطوط ی ب وی س و ی ح وی ف دفعہ ۲۷۵ مین مزدوج موسیقیہ بناتے ہین اسواسطے کہ اونکی مساواتین یہہ ہین کہ

لو = ۰ و می = ۰ و ل لو − م می = ۰ و ل لو + ن می = ۰

اور قرینہ سے ف ب اور ف ا و ف ح و ف ی بہی ایک مزدوج موسیقیہ بناتے ہین اور نیز ح ا و ح س اور ح ف اور ح ی مزدوج موسیقیہ بناتے ہین اسواسطے کہ اونکی مساواتین یہہ ہین کہ

ل لو − م تو = ۰ اور م مو − ن می = ۰ اور ل لو − م مو − (م مو − ن می) = ۰
ل لو − م مو + م مو − ن می = ۰

(۳۳۵) اگر تراشش مخروطی کے دو مماسون کے نقطہ تقاطع سے ایک خط کہیچا جاے تو وہ تراشش مخروطی سے اور وتر تماس سے نسبت موسیقیہ مین تقسیم ہوگا

مماس ون کو محور بناؤ تو مساوات خط منحنی کی بموجب دفعہ ۲۵۳ کے یہہ ہوگی

$$\left(\frac{\text{لا}}{\text{ح}} + \frac{\text{ی}}{\text{و}} - ۱\right)^{۲} + \text{لب لا ی} = ۰ \qquad (۱)$$

فرض کرو کہ ایک خط مستقیم مبدء سے کہیچا جاوے اور اوسکے مساوات بموجب دفعہ ۷۳ کے یہہ ہو

$$\frac{\text{لا}}{\text{ل}} = \frac{\text{ی}}{\text{م}} = \text{ق} \qquad (۲)$$

پس (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے ابعاد جو مبدء سے ہون اونکی قیمتین ق کی قیمتین ہونگین جو اس مساوات سے دریافت ہون

$$\left(\frac{\text{ل ق}}{\text{ح}} + \frac{\text{م ق}}{\text{و}} - ۱\right)^{۲} + \text{لب ل م ق}^{۲} = ۰$$

$$\text{یا} \left(\frac{\text{ل}}{\text{ح}} + \frac{\text{م}}{\text{و}} - \frac{۱}{\text{ق}}\right)^{۲} + \text{لب ل م} = ۰ \qquad (۳)$$

اگر قَ اور قً قیمتین مساوات کی ہون تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$\frac{۱}{\text{قَ}} + \frac{۱}{\text{قً}} = ۲\left(\frac{\text{ل}}{\text{ح}} + \frac{\text{م}}{\text{و}}\right) \qquad (۴)$$

اور نیز مساوات وتر مماس کی یہہ ہے کہ

$$\frac{\text{لا}}{\text{ح}} + \frac{\text{ی}}{\text{و}} - ۱ = ۰ \qquad (۵)$$

اس سے معلوم ہوا کہ نقطہ تقاطع (۲) اور (۵) کا جو بعد ق مبدء سے ہے اوسکی یہہ مساوات حاصل ہوتی ہے کہ

$$\frac{\text{ل ق}}{\text{ح}} + \frac{\text{م ق}}{\text{و}} = ۱ \text{ یا } \frac{۱}{\text{ق}} = \frac{\text{ل}}{\text{ح}} + \frac{\text{م}}{\text{و}} \qquad (۶)$$

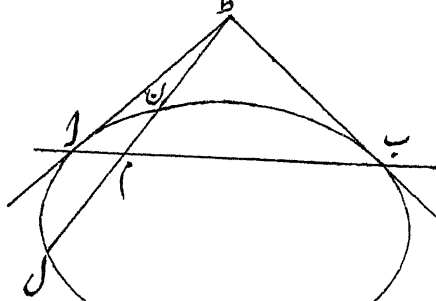
(۴) اور (۶) سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{۲}{\text{ق}} = \frac{۱}{\text{قَ}} + \frac{۱}{\text{قً}}$$

پس ق اوسط موسیقیہ درمیان قَ اور قً کے ہے

چونکہ ل م ن ط نسبت موسیقیہ مین تقسیم ہوا ہی

اگر کسی نقطہ سے ا ب کے ہم خطوط

ل اور ن اور ط تک کہیچین تو یہہ خطوط ا ب کے ساتہہ ایک مزبر موسیقیہ بنائینگے

ایک خاص صورت وہ ہے جسمیں نقطہ ا ب میں نقطہ تقاطع اون مماسوں کا ہوتا ہے جو ن اور ل سے نکالے جائیں یہہ مماس ا ب پر ملتے ہیں (دفعات ۱۰۳ و ۱۸۶ دیکھو)

(۳۳۶) فرض کرو کہ ا و ب و س و د چار نقطے ایک تراش مخروطی کے ہیں اور ع ایک پانچواں نقطہ ہے

فرض کرو کہ ھ وہ عمود ہے جو ع سے ا ب پر اور ب وہ عمود ہے جو اوسی نقطہ سے ب س پر اور ر وہ عمود ہو جو س د پر اور م وہ عمود ہو جو د ا پر نکالا جائے تو

بموجب دفعہ ۳۱۷ کے ہم جانتے ہیں کہ خواہ ع کہیں ہو ھ ر نسبت بالاستقلال ب م سے رکھتا ہے اب $\overline{\text{اب}}$ . ھ = ۲ دو چند رقبہ مثلث ع ا ب یا

$$= \overline{\text{ع ا}} \cdot \overline{\text{ع ب}} \cdot \text{جب ا ع ب}$$

$$\therefore \text{ھ} = \frac{\overline{\text{ع ا}} \cdot \overline{\text{ع ب}} \ \text{جب ا ع ب}}{\overline{\text{ا ب}}}$$

اسیطرح سے ب و ر و م کی قیمتیں دریافت ہو سکتی ہیں پس

$$\frac{\text{ع ا . ع ب . ع س . ع د جب ب ع س . جب د ع ا}}{\text{ب س . ا د}}$$ کو نسبت بالاستقلال

$$\frac{\text{ع ا . ع ب . ع س . ع د}}{\text{ب س . ا د}} \ \text{جب ب ع س . جب د ع ا}$$ سے ہے

$$\therefore \frac{\text{جب ا ع ب . جب س ع د}}{\text{جب ب ع س . جب د ع ا}}$$ مقدار مستقل ہے یعنی کسی نقطہ ع سے چار نقاط ا و ب و س و د تک مزبر بنایا جائے اوسکی نسبت غیر موسیقیہ بالاستقلال ہوگی

# مثالوں کے جواب

## پہلا باب

(۸) محددین نقطہ د کے $\frac{1}{2}$ (لا۱ + لا۲) اور $\frac{1}{2}$ (ی۱ + ی۲) ہیں

اور محددین نقطہ ح کے $\frac{1}{3}$ (لا۱ + لا۲ + لا۳) اور $\frac{1}{3}$ (ی۱ + ی۲ + ی۳) ہیں

(۱۰) فرض کرو کہ ق اور ر محددین قطبیہ س کی ہیں تو زاویہ ا ط س = زاویہ ب ط س

یعنی ر − ر۱ = ر۲ − ر ∴ ر = $\frac{1}{2}$ (ر۱ + ر۲)

پھر مثلث کے رقبہ کے جملہ معلوم سے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ (۱۶ باب دیکھو)

مثلث ا ط ب = $\frac{1}{2}$ ق۱ ق۲ جب (ر۲ − ر۱)

مثلث ا ط س = $\frac{1}{2}$ ق۱ ق جب (ر − ر۱)

مثلث ب ط س = $\frac{1}{2}$ ق۲ ق جب (ر۲ − ر)

پس ق۱ ق۲ جب (ر۲ − ر۱) = ق ق۱ جب (ر − ر۱) + ق ق۲ جب (ر۲ − ر)

= ق (ق۱ + ق۲) جب (ر۲ − ر۱)

∴ ق (ق۱ + ق۲) = ۲ق۱ ق۲ جم $\frac{1}{2}$ (ر۲ − ر۱)

## تیسرا باب

(۱) ی + ۲لا = ۱ (۲) لا = ۲ (۳) ی = لا (۲) لا = ۰

(۲) ی − ۴ = − ۳ (لا − ۴) ی − ۴ = $\frac{1}{3}$ (لا − ۴)

(۳) ی − ۱ = (۲√۳ − ۲) لا اور ی − ۱ = − (۲√۳ + ۲) لا

(۴) ی = لا و ی = − لا (۵) ی = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ لا و لا = ۰

(۶) ۹۰° و لا = − $\frac{1}{2}$ (۱۰) ی = $\frac{3}{2}$ (۷) ۹۰° (۸) ۴۵°

(۹) ی = ± (لا − ط) ی = لا (۱۱) ۲√۲

(۱۲) $\frac{اب}{\sqrt{ا^2 + ب^2}}$ (۱۳) لا = ی = $\frac{اب}{ا + ب}$ (۱۴) $\frac{لا}{ا^2} - \frac{ی}{ب^2} = \frac{1}{ا} - \frac{1}{ب}$

(۱۵) (۱) مبدء (۲) دو خطوط مستقیم ی = لا اور ی = - لا (۳) دو خطوط مستقیم لا = ۰ اور لا + ی = ۰ (۴) محور (۵) ناممکن (۶) دو خط مستقیم لا = ۰ اور ی = ا (۱۶) (۱) دو خط مستقیم لا = ا اور ی = ب (۲) نقطہ (ا و ب) (۳) نقطہ (۰ و ک) (۱۷) خطوط ی = لا اور ی = ۳ لا (۱۹) ۴ ی = ۵ لا اور ۳ ی + ۲ لا - ۲۰ = ۰

(۲۰) فرض کرو کہ ط طول ضلع مسدس کا ہو تو مساوات اب کی ی = ۰ اور اس کی
ی √۳ = لا اور ا د کی ی = لا √۳ اور ا ی کی لا = ۰ اور ا ف کی
ی + لا √۳ = ۰ اور ب س کی ی = √۳ (لا - ط) اور ب د کی لا = ط
ب ی کی ی + √۳ (لا - ط) = ۰ اور ر ب کی ی √۳ + لا - ط = ۰
اور س د کی ی + لا √۳ = ۲ ط √۳ اور س ی کی ی √۳ + لا = ۳ ط
اور س ف کی ۲ ی = ط √۳ اور د ی کی ی = √۳ ط اور د ف کی
ی √۳ - لا = ۲ ط اور ی ف کی ی - لا √۳ = ط √۳

(۲۱) اگر (لا۱ و ی۱)، (لا۲ و ی۲) و (لا۳ و ی۳) کونوں کے نقطے ہوں تو محددین نقطہ وسط اول اور دوم کے (لا۱ + لا۲)/۲ اور (ی۱ + ی۲)/۲ ہیں اور اسیطرح محددین نقطہ وسط دوم اور سوم کے معلوم ہو سکتے ہیں اور پھر بموجب دفعہ ۳۵ کے مساوات دریافت ہو سکتی ہے (۲۲) (م ± ۱)/(م - ۱) امس د (۲۴) لا/ا + ی/ب = ۱ اور لا/ا = ی/ب اور اونکے زاویہ درمیانی کا مماس ۲ ا ب حب ھ / (ا۲ - ب۲) (۲۹) نقاط جنکے محدد ا + ا/ب اور ا - ا/ب اور √(ا۲ + ب۲) √(ا۲ + ج۲) ہیں

(۳۱) (ک - ۴ ا س)/(ا + س) (۳۵) ۹۰° (۳۶) ح(ر) = ۰ سے ایک نظام خطوط کا معلوم ہوتا ہے جو مبدء میں گذرتی ہیں اور حب ۳ ر = ۰ سے تین خط ی = ۰ اور ی = لا √۳ اور ی = - لا √۳ (۴۰) اول زوج خطوط کے زوایاء درمیانی کو دوسرا زوج خطوط کا تنصیف کرتا ہے

(۴۴) فرض کرو کہ ا ب س مثلث ہی اکو مبدء بناؤ اور نقطہ ا سے جو دو خط متوازی خطوط مقابلہ کے کھیچے جائیں انکو محور بناؤ اور لا۱ اور ی۱ کو محددین ب کے اور لا۲ اور ی۲ محددین نقطہ س کے فرض کرو تو ثابت ہو سکتا ہے کہ مساواتین تینوں اقطار مذکور کی یہہ ہین کہ

$$\text{ی} - \text{ی}_۱ = \frac{\text{ی}_۱ - \text{ی}_۲}{\text{لا}_۲ - \text{لا}_۱}(\text{لا} - \text{لا}_۱) \quad \text{و} \quad \text{ی} - \text{ی}_۲ = - \frac{\text{ی}_۲}{\text{لا}_۲}\,\text{لا} \quad \text{و} \quad \text{ی} - \text{ی}_۱ = \frac{\text{ی}_۱}{\text{لا}_۱}\,\text{لا}$$

ان مساواتون سے یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ تینون نظر ایک نقطہ پر ملتے ہین

(۴۵) ط کو مبدء قرار دو اور معادلات قطبیہ معلوم خطوط قائم کو کام مین لاؤ (۴۶) فرض کرو کہ لا۱ محدد نقطہ تقاطع دو خطوں کا ہے تو رقبہ مثلث کا $\frac{1}{2}$ (س۲ − س۱) لا۱ ہے

(۴۷) یہہ بموجب دفعہ ۱۱ کے حل ہو سکتا ہی یا ہم پہلے سوال کے نتیجہ کو کام مین لا سکتے ہین کیونکہ ہم شکل بناکر تین مثلث ایسے بنا سکتے ہین کہ ان مین سوالات سابق الذکر کا استعمال ہو سکتا ہے اور مثلث مطلوب کا رقبہ تفاوت ان دو مثلثون اور تیسرے مثلث کا ہے

الحاصل نتیجہ یہہ ہے کہ $\frac{1}{2}\left[\frac{(\text{س}_۳ - \text{س}_۲)^۲}{(\text{م}_۳ - \text{م}_۲)} + \frac{(\text{س}_۱ - \text{س}_۳)^۲}{(\text{م}_۱ - \text{م}_۳)} + \frac{(\text{س}_۲ - \text{س}_۱)^۲}{(\text{م}_۲ - \text{م}_۱)}\right]$

اور اسکو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ

$$\mp \frac{\left[\text{س}_۱(\text{م}_۳ - \text{م}_۲) + \text{س}_۲(\text{م}_۱ - \text{م}_۳) + \text{س}_۳(\text{م}_۲ - \text{م}_۱)\right]^۲}{۲(\text{م}_۳ - \text{م}_۲)(\text{م}_۱ - \text{م}_۳)(\text{م}_۲ - \text{م}_۱)}$$

علامت وہ لینی چاہیئے کہ جسسے نتیجہ مثبت حاصل ہو

## چوتھا باب

(۱) $\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ب}} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ی}}{\text{ح}}$ ... ہم فرض کر سکتے ہین کہ

(۷) مثال ۵ مین جس خط کا بیان ہوا ہے اوسکا متوازی خط مطلوب ہے اسلئے اوسکی مساوات یہہ فرض کر سکتے ہین

ھ جم ا − ف جم ب + ق = ۰ اسمین ق ایک مقدار مستقل ہے جسکا تشخیص کرنا منظور ہے اب ا ب کے نقطہ وسط پر ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہی کہ

$$- \text{ھ} = \frac{\text{س}}{۲}\,\text{حب ب} \quad \text{اور} \quad - \text{ف} = \frac{\text{س}}{۲}\,\text{حب ا}$$

اسیواسطے

$$-\frac{\text{س}}{۲}\,\text{حب ب جم ا} + \frac{\text{س}}{۲}\,\text{حب ا جم ب} + \text{ق} = ۰$$

پس ق تشخیص ہوگیا

(۱۳) (م نَ – مَ ن) لو + (ن لَ – نَ ل) مو + (ل مَ – لَ م) می = ۰

(۱۴) اب (لو – مو) + س (ب + ا) می = ۰

(۱۵) ل ھ + م ب + ن س = ۰ تو مساوات مطلوبہ فرض کرو دائرہ اندرونی کے مرکز پر ھ = ب = س پس ل + م + ن = ۰ اور مرکز دائرہ بیرونی پر ھ د ب و س تناسب جداگانہ جم ا و جم ب و جم س کے ہین

پس ل جم ا + م جم ب + ن جم س = ۰ پس اس سے نتیجہ مطلوب حاصل ہوسکتا ہے

(۱۸) س ع کی ۲ م مو – ن می = ۰ اور د ع کی ۲ ل ی – ۲ م می + ن می = ۰

ا ق کی ل لو – ۲ م مو + ۲ ن می = ۰ اور ر ق کی ل لو – ۲ م مو = ۰

(۲۳) یہہ بہی ثابت ہوسکتا ہی کہ اگر لو = ۰ اور مو = ۰ اور می = ۰ اضلاع مثلث کے ہون تو خطوط ا ع اور ب ع اور س ع بہی م مو – ن می = ۰ اور ن می – ل لو = ۰ اور ل لو – م مو = ۰ سے جداگانہ تعبیر ہوتی ہین اب اور مساواتین بہی خطون کی آسانی سے بیان ہوسکتی ہین

(۲۴) فرض کرو کہ ھ = ۰ و ب = ۰ اور س = ۰ اضلاع مثلث ا ب س کو تعبیر کرتے ہین تو مساواتین ب س و س ا و ا ب کی جداگانہ ب + س = ۰ اور س + ھ = ۰ اور ھ + ب = ۰ تو مساوات ا اَ کی ب – س = ۰ کی ہوگی اور ا اَ عمود ب س پر ہوگا

(۴۵) مساوات ط طَ کی ب – س = ۰ نقطہ د سے جو خط کہینچا جاے اوسکی مساوات ب – س – لر = ۰ مقرر کرو پس یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات ط ف کی ب – س – لو (ھ – س) = ۰ اور مساوات ط ی کی ب – س – لو (ھ + ب) = ۰ مماس نقطوع پر ب = – لر اور یہی ربط نقطہ ق پر قائم ہے

## پانچوان باب

(۱) $(لا^۲ + ی^۲)^۲ = ط^۲ (لا^۲ - ی^۲)$ (۳) $ی^۲ = س ۴ لا - \frac{س^۲}{۴}$

(۴) $ی ح ہ = ۴ ا لا$ (۵) بموجب دفعہ ۸۳ ہمکو یہہ حاصل ہے

کہ $م = \frac{حب (د - ھ)}{حب د}$ اور $ن = \frac{حب (د - ب)}{حب د}$ اور $مَ = \frac{حب ھ}{حب د}$ اور

$نَ = \frac{حب ب}{حب د}$

# چھٹا باب

(۱۰) (۱) محددین مرکز کے ۲ اور −۳ ہین اور نصف قطر ۳

(۲) محددین مرکز کے −۳ اور $\frac{۳}{۲}$ اور نصف قطر $\frac{۷}{۲}$

(۳) اول خط مستقیم دائرہ سے نقاط (−۴ و ۳) اور (۳ −۴) پر ملتا ہی اور دوسرا نقاط (۰ و −۵) اور (−۵ و ۰) اور تیسرا نقطہ (−۴ و −۳) پر مس کرتا ہے

(۵) $لا^۲ - لا (لاَ + لاً) + ی^۲ - ی (یَ + یً) + لاَ لاً + یَ یً = ۰$

(۸) نقاط تقاطع کے محدد دریافت کرنیکے واسطے ہمکو یہہ حاصل ہے کہ

$لا^۲ (۱ + \frac{ق^۲}{ح^۲}) + \frac{۲ق}{ح} (ص - ق) لا - ۲ ط لا + ق^۲ - ۲ ص ق = ۰$

اگر خط دائرہ کو مس کرتا ہی تو ہمکو یہہ حاصل ہی کہ $(ق ص - ح ط)^۲ + ۲ ح ق (ق ط + ح ص) = ح^۲ ق^۲$

(۹) $۲ ی + ۳ لا = ۰$ (۱۴) $لا^۲ + ی^۲ - لا ی - ح لا - ق ی = ۰$

(۱۵) زاویہ میلان محوروں کا ۱۲۰° ہی اور ہر ایک کے مرکز کا معین = ح اور نصف قطر = ح

(۱۶) زاویہ میلان محوروں کا ۶۰° ہی اور محددین مرکز = $\frac{ح}{۳}$ اور

نصف قطر = $\frac{ح}{\sqrt{۳}}$ (۱۷) $لا^۲ + ی^۲ + لا ی \sqrt{۲} - ۹ = ۰$

(۱۸) $لا^۲ + ی^۲ + لا ی + لا + ی - ۱ = ۰$ (۱۹) $\sqrt{ح^۲ + و^۲ - ۲ ح و جم د}$

(۲۳) $لا^۲ + ی^۲ = ط (لا + \frac{ی}{\sqrt{۳}})$ اور $و = \frac{۲ط}{\sqrt{۳}} جم (ر - \frac{\pi}{۶})$

(۲۷) ایک دائرہ (۲۸) سوال ۲۶ کی مساوات کو کام مین لاؤ

(۲۹) محددین قطبیہ کے استعمال سے

$و + \sqrt{و^۲ + ط^۲ - ۲ و ط جم ر} = \sqrt{و^۲ + ط^۲ - ۲ و ط جم (\frac{۲\pi}{۳} - ر)}$

پس محدد $\frac{ط - م ن}{م^۲}$ ہے اب چونکہ وتر قریب البضوی ی۲ = ۸ ط (لا - س) کو مس کی
تو مساوات (م لا + ن)۲ = ۸ ط (لا - س) کی برابر قیمتین ہونی چاہئے اس شرط کے وسیلے سے
ہم ثابت کر سکتے ہین کہ $\frac{۲ ط - م ن}{م^۲}$ = س (۴۳) مساوات جسے قریب البضوی کے ایک
ہی نقطہ کا معین تشخیص ہوتا ہی جسے کہ عمود المماس نقطہ معلوم پر گذرے تو مساوات مکعبی
ہو گی (۴۵) نقطہ (لا و ی) سے جو تین عمود المماس کھیچے جائین اونکا محور کے ساتھہ جو زاویا میلان
ہونگی اونکے مماس اس مساوات م۳ + م (۲ - $\frac{لا}{ط}$) + $\frac{ی}{ط}$ = ۰ سے تشخیص ہوتے ہین دفعہ
۱۳۵ کو دیکھو

فرض کرو کہ م۱ و م۲ و م۳ قیمتین اس مکعبی مساوات کی تو بموجب مسائل معادلات کے
م۱ + م۲ + م۳ = ۰ اور م۲ م۳ + م۳ م۱ + م۱ م۲ = ۲ - $\frac{لا}{ط}$
اور م۱ م۲ م۳ = - $\frac{ی}{ط}$ اگر دو عمود المماس علی القوائم ہون تو م۲ م۳ = - ۱
رکھہ سکتے ہین ان مساواتون سے م۱ و م۲ اور م۳ کے اسقاط سے ہم ی۲ = ط (لا - ۳ ط)
دریافت کرتے ہین (۴۶) غرض اسے مراد وہ بعد ہی جو درمیان اون مماسون کے واقع ہین
جو متوازی ع ق کے ہون (۴۷) $\frac{ق - ہ\ ط ح}{ق^۲ + ہ\ ط^۲}$ (۵۵) مساوات ی = م لا + $\frac{ط}{م}$ قریب البضوی
کے مماس کو تعبیر کرتی ہی اگر یہہ مماس نقطہ ح و ق پر گذرے تو ق = م ح + $\frac{ط}{م}$ حاصل ہوگا
اور م = $\frac{ی - ق}{لا - ح}$ اسمین (لا و ی) کوئی نقطہ مماس پر بنی
پس ق - $\frac{ی - ق}{لا - ح}$ ح = $\frac{ط (لا - ح)}{ی - ق}$ اسے اول صورت مساوات کی پیدا ہو گی
دوسری صورت مساوات کی اول صورت سے مستنبط ہو سکتی ہی دفعات ۳۲۱ و
۳۲۲ و ۵۶ کو دیکھو (۵۶) مساوات ی۲ = ۴ ط لا قریب البضوی کو تعبیر کرتی ہے
اور مساوات ق ی - ۲ ط لا = ۲ ط ح وتر تماس کو تعبیر کرتا ہی اسے معلوم ہوا کہ مساوات
۴ ط لا (ق ی - ۲ ط لا) = ۲ ط ح ی۲ بعض مقام التقاط کو تعبیر کرتا ہی جو قریب البضوی اور
وتر کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہے دفعہ ۱۶۱ دیکھو

# نواں باب

(۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (۲) ء + ی لا = ط اور حصہ مابین محور لا = $\frac{ط}{ی}$ اور حصہ مابین محور ء = ط (۳) ء + ط ی = $\frac{ط}{ی}$

(۴) نسبت خارج المرکزی $ی^2$ + ی = ا سے تحقیق ہوتی ہی (۵) ء = $\frac{ص}{ط}$ (لا + ط)

ء = $\frac{ص لا}{ط ی}$ وخطوط متوازیہ اگر ۳ ی = ا (۶) ء = $\frac{ص}{ط ی}$ (لا - ط ی)

اور محدد نقطہ تقاطع کا $\frac{۲ ط ی}{ا + ی^2}$ ہے

(۷) ء = - (ا + ی) (لا - ط) وس ت ا $\frac{ا}{ا + ی + ی^2}$ (۸) $\frac{۲ ط ی - ط لا (ا + ی)}{ط (ا + ی) - ۲ ی لا}$

(۹) محددین نقطہ کے لا = $\frac{ط^2}{\sqrt{ط^2 + ص^2}}$ اور ء = $\frac{ص^2}{\sqrt{(ط^2 + ص^2)}}$

(۱۰) محددین نقطہ کے لا = $\frac{ط}{\sqrt{۲}}$ اور ء = $\frac{ص}{\sqrt{۲}}$ ہیں

(۱۹) اگر زاویہ میلان دو خطوط متوازیہ کا محور لا کے ساتھہ بڑا یہ نسبت مس ا $\frac{ط ی}{ص}$ کے ہو تو دائرہ بالکل باہر بیضوی سے واقع ہوگا (۲۲) $\frac{لا}{ط}$ جم بر (+ $\frac{ء}{ص}$ جم بر) = ا

(۲۵) محددین نقطہ مطلوب کے لا = $\frac{ط ی (ص - ط)}{ص - ط ی^2}$ و ء = $\frac{ط ص (ا - ی)}{ص - ط ی^2}$

جب $ی^2$ + ی = ا تو خطوط متوازی ہونگے

(۲۸) $لا^2 + ء^2$ - لا (ط ی + لا) - ء ء + ط ی لا = ۰ (۳۰) اگر نقطہ (ح و ق) درمیان خطوط منتظمہ کے ہو تو مجموعہ عمودون کا $\frac{۲ ط ص}{\sqrt{(ط^2 ق^2 + ص^2 ح^2)}}$ ہی اگر نقطہ (ح و ق) کا درمیان خطوط منتظمہ کے نہو تو مجموعہ عمودون کا ± $\frac{۲ ط ص ح ی}{\sqrt{ط^2 ق^2 + ص^2 ح^2}}$ اور اگر ح مثبت ہو تو اوپر کی علامت اور اگر ح منفی ہو تو نیچے کی علامت لو (۳۱) دائرہ جسکا مرکز بیضوی کے مرکز پر ہو اور نصف قطر = ط + ص

(۳۲) ء = ± لا ± $\sqrt{(ط^2 + ص^2)}$ دفعہ ۱۷۱ دیکھو (۳۴) مقام النقاط دائرہ $لا^2 + ء^2 = ط^2 + ص^2$ ہے یہہ مثال ۳۳ کی دوسرے حصہ سے مستنبط ہو سکتا ہے

(۳۵) باب ششم کے ۵۵ مثال پر حو لکھا ہی اوسی دیکھو (۴۲) اس مثال کا پہلا جزو

اسطرح حل ہوتاہے کہ اوس خط کی مساوات دریافت کرین جو دونو بیضویون کے نقاط تقاطع پرگذرتاہے

(۴۵) لا$^2$ + ی$^2$ = (ط$^2$ + ص$^2$)$^{\frac{1}{2}}$ (لا + ی) (۴۶) فرضکرو کہ ح و ق محددین نقطہ بیرونی کے ہین انکے مطابق مساوات وتر مماس کی ط$^2$ ق ی + ص$^2$ ح لا = ط$^2$ ص$^2$ اورمساوات اوس خط کی جو (ح و ق) سے عمود وتر پر ہو (ی − ق) ص$^2$ ح = ط$^2$ ق (لا − ح)

اب ہم یہہ جانتے ہین کہ دوسرا خط مماس بیضوی کا ہو اس مماس ہونے کے واسطے جو شرط ضروری ہے وہ اس مساوات کو مساوات ی = م لا + $\sqrt{م^2 ط^2 + ص^2}$ کے ساتہہ مقابلہ کرنے سے دریافت ہوسکتی ہے اور ہمکو یہہ حاصل ہوتاہی کہ ق$^2$ ص$^6$ + ح$^2$ ص$^6$ = ح$^2$ ق$^2$ (ط$^2$ − ص$^2$)

(۴۸) ط$^2$ (ی$^2$ + ۲ ی ق) + ص$^2$ (لا$^2$ + ۲ لا ح) = ۰ (۵۲) ایک بیضوی (۵۳) مقام النقاط ایک بیضوی ہے اگر ا مبدء ہو اور ا ب محور لا کا تو ہر ایک مقام النقاط بیضوی ہوگا اگر مبدء ہو اور ا ب محور لا کا تو ہر ایک محدد ماسکہ کا برابر نصف قطر دائرہ کی ہی (۵۴) $\frac{ی^2 لا ی}{ص^2}$ (۵۵) لا کی جگہہ ط جم ب اور ی کی جگہہ ص جم ب دفعہ ۱۶۸ کے نتیجہ سابقہ مین رکہو تو سب سے بڑی قیمت $\frac{ی^2 ط}{۲ ص}$ ہی (۵۷) فرض کرو کہ بیضوی کا ایک نقطہ ع ہی اور ق مرکز دائرہ کا ہے جو مثلث ص ع ہ مین بنایا جاے پس اگر ی معین نقطہ ع کا ہو تو ثابت ہوسکتا ہی کہ نصف قطر دائرہ کا جو = $\frac{\text{رقبہ مثلث ص ع ہ}}{\text{نصف مجموعہ اضلاع}}$ = $\frac{ی ی}{۱ + ی}$ یہہ معین نقطہ کا ہے اگر لا محدد نقطہ ع کا ہو تو یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ محدد ق کا ی لا ہے پس اسطرح معلوم ہوگا کہ مقام النقاط مطلوب بیضوی ہے (۵۸) وہ نقطہ دریافت کرو جسپر ص ط اوس عمود المماس سے ملتا ہی جو نقطہ ع سے کہنچی جائین اور وہ نقطہ بہی دریافت کرو جسپر ہ ط نقطہ ع کے عمود المماس سے ملتاہے تو یہہ بات ظاہر ہوگی کہ نقطے منطبق ہوتے ہین

# دسوان باب

(۱) لا ص (ص لا$^\prime$ − ط ی$^\prime$) + ی ط (ط ی$^\prime$ + ص لا$^\prime$) = ط$^2$ ص$^2$ (۲) قطر اور اوسکے مزدوج کو محور بناکر مساوات بیضوی کی لو (۳) دفعہ ۱۱ دیکہو

(٨) نق (طا جب ا ر + صا جم ا ر) = ٢ طا نق ا جم ر (٩) اور (١٠) مین (٨) کے
ماحصل کو کام مین لاؤ (١٢) مثال ١١ کا نتیجہ (١٣) جب کہ ر = ٠ اور جب کہ ر = ک/٢ تو
وہ تقاطع کرتے ہین (١٤) عرض مستقیم کے اطراف کے مماسون کی مساوات دفعہ (٢٠٥)
نق (ی جم ر + جب ر) = ط (١ - ی٢) اور نق (جب ر - ی جم ر) = ط (١ + ی٢)
نق (ی جم ر - جب ر) = ط (١ - ی٢) اور نق (جب ر + ی جم ر) = - ط (١ + ی٢)
محور اصغر کے انجامون سے جو مماس نکلے اونکی مساواتین یہہ ہین کہ نق جب ر = ص اور نق جب ر = - ص
(١٥) ایک خط مستقیم جو ص پر گذرتا ہی دفعہ ٢٠٥ دیکھو
(١٧) جم ر = (ی + یَ) / (١ + ی یَ) اور ی = ط (١ + ی یَ) (١٨) ص/ط اور ط/ص کے درمیان
(٢٠) دفعہ ٢٠٨ دیکھو (٢٢) مرکز سے جو نصف قطر دائرہ کھینچا جاے اوسکی اور مماس کے درمیان
زاویہ کی جیب ع/نق ہی اسمین ع٢ (ط٢ + ص٢ - نق٢) = ط٢ ص٢ بموجب ١٩٦ پس
جب ٢ نق٢ = ط٢ + ص٢ تو سب سے چھوٹی قیمت ع/نق ہوگی (٢٩) یہہ ثابت ہوسکتا ہے
کہ محور قریب البیضوی کا محور بیضوی پر منطبق ہوا سے معلوم ہوا کہ عرض مستقیم کیا ہا ٢ط٢/(ط٢ + ص٢) ہا ٢ص٢/(ط٢ + ص٢) ہوگا
(٣١) بیضوی (٣٢) ایک بیضوی (٣٥) ع ق اور عَ قَ کی معادلات قطبیہ کام مین لاؤ
دفعہ ٢٠٥ دیکھو (٣٨) متوازی الاضلاع کے دو ضلعے ان مساواتون ل/ط جم س + ک/ص جم س = ± ١
اور باقی دو ضلعے مساواتون ل/ط جم سَ + ک/ص جب سَ = ± ١ باب نہم کی مثال ٢٢ دیکھو
یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہی کہ متوازی الاضلاع کے قطار بیضوی کی مرکز پر متقاطع ہوتی ہین پس اگر
مرکز بیضوی متوازی الاضلاع کے متصل کے کونون کے ساتھہ ملایا جاتا تو مثلث جو اسطرح پیدا ہوگا
وہ ایک چوتھائی متوازی الاضلاع کی ہوگی اور رقبہ مثلث کا موافق دفعہ ٧ باب ١ کے معلوم ہے
(٤١) محدد (ص لَ - ط کَ)/ص اور معین (ط کَ + ص لَ)/ط ہے (٤٢) مثال ٤١ مین نقطہ تقاطع
کے محددین دریافت ہوئی ہین اونکو ح اور ق سے تعبیر کرو اور باب نہم کی ٣٥ مثال کی دوسری
صورت معلوم کام مین لاؤ (٤٤) سب سے بڑی قیمت اسطرح دریافت ہوسکتی ہے کہ دفعہ ١٦٨

جو قیمتین لا اور ی کی دریافت ہوئین اونکو منزرج کرو تو وہ خاص (۲۹ - ۱) دریافت ہوگی

(۴۷) ایک بیضوی (۴۸) بیضوی باعتبار اقطار مزدوج متساویہ کے

(۵۱) مثال ۵ کی استعانت سی ثابت ہوسکتی ہے یا ہم جب معمولی محور لیں پس اگر لا اور ی محددین ہون تو محددین م کی $\frac{ط (ط لا + ص ی)}{ط^۲ + ص^۲}$ اور $\frac{ص (ط لا + ص ی)}{ط^۲ + ص^۲}$ ہونگے اور ن کے محددین $\frac{ط (ط لا - ص ی)}{ط^۲ + ص^۲}$ اور $\frac{ص (ص ی - ط لا)}{ط^۲ + ص^۲}$ ہونگے اسے حل کامل حاصل ہوجائیگا

# گیارہوان باب

(۱) $ی^۲ - ۳ لا^۲ = - ۳ ط^۲$ (۲) ایک خط مستقیم

# بارہوان باب

(۳) فرضکرو کہ م سکے سے جو خط کہیجا جاے وہ قریب البضوی سےع اور ع پر ملے اور خطوط ممتنع الملاقات سے تقاطع ق اور ق پر تو یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ ع ع = $\frac{۲ ط (ی^۲ - ۱)}{۱ - ی^۲ جم^۲ ر} = \frac{۲ ط جا^۲ هه}{جم^۲ هه - جم^۲ ر}$ اور ق ق = $\frac{۲ ط جا هه جا ر}{جم^۲ هه - جم^۲ ر}$ اور طول مطلوب نصف تفاوت ع ع اور ق ق کا ہی

(۴) مرکز دایرہ کو مبدء مقرر کرو اب کو محور لا کا اور ع ق کا جو قطر متوازی ہی اوسکو محور ی کا مقرر کرو تو مقام النقاط معلوم مساوات $ی^۲ = لا^۲ - ط^۲$ سے معلوم ہے اور اسیواسطے قائم الزاویہ بعید البضوی بلحاظ اقطار مزدوج کے معلوم ہے (۹) باب نہم کے مثال ۳ وہ سی ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ مس هه = $\frac{و^۲ + ۴ ط ح}{و^۲ + ۴ ح}$

$\therefore (ح + ط)^۲ مس^۲ هه = ق^۲ - ۴ ط ح$

$\therefore (ح + ط^۲) قط^۲ هه = و^۲ + (ح - ط)^۲$ (۱۰) دونو قطر خط منحنی سے ملنے چاہئیے اور یہہ بہی دریافت ہوگا کہ قطر مزدوج قطر متقاطع سے بڑا ہوگا

# تیرہوان باب

(۱) مساوات کو اسطرح لکہہ سکتے ہین کہ (لا - ۲ ی) (لا - ۳ ی + ۲ ط) = ۰ اور اسیواسطے وہ دو خطوط متوازیہ کو تعبیر کرتی ہے ایک خط جو اوسکا متوازی ہو اور جو قیمتین وسط مین اونکی ہو تو وہ خط مرکزون کا ہوگا (۳) ح = $\frac{ص}{۳}$ و = $\frac{ص}{۳}$

(۳) دو خطوط متوازیہ (۴) قریب البضوی (۵) اگر زاویہ ا چھوٹا کہ سے ہو تو بعید البضوی اور وہ بڑا بہ نسبت کہ کے ہو تو بضوی اور اگر برابر کہ کے ہو تو ایک خط مستقیم

(۶) مساوات بعید البضوی کی ط^۲ ی^۲ = ط^۲ ص^۲ - ۴ ط ص لا + ۳ ص^۲ لا^۲

اور خطوط ممتنع الملاقات معادلات ط ی = ± (لا - ۲ط/۳) ص √۳ سے متعین ہوتے ہیں (۸) مقام النقاط وہ خط مستقیم جو برابر محوروں پر منطبق ہوتا ہے، (۱) دفعہ ۲۰۵ کو کام میں لاؤ (۱) ط√۳/۲ (۳) مس^{-۱} ط/ص

(۱۴) ([ھ ی + لا √(ا ب)]^۲ - ۲ ھ ب ی لا - ھ^۲ (ب + ی) ی + ھ^۲ ا ب ج = ۰

(۱۷) (۱) دائرہ جس کا مرکز بضوی معلوم کے دوسرے ماسکہ پر ہو (۲) بضوی جس کا ماسکہ بضوی معلوم کا دوسرا ماسکہ ہو

(۱۵) مساوات (ی - ۳ لا + ۱) (ی - ۲ لا + ۴) = ۰ اور اسی واسطے دو خطوط مستقیم تعبیر کرتا ہے،

(۲۴) باب ہشتم کی آخر مثال میں نتیجہ معلوم کو کام میں لاؤ (۲۶) مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے کہ

(لا^۲ + ی^۲) + لا ی √۳ - ط^۲) (لا^۲ + ی^۲ - لا ی √۳ - ط^۲) = ۰

# چودھواں باب

(۲) ہر ایک مقام النقاط بضوی ہی (۴) (۵) (۶) میں دفعہ ۲۹۴ کی مساوات کام میں لاؤ

(۷) مساوات بضوی کی لا^۲/ط^۲ + ی^۲/ص^۲ = ۱ مساوات وتر مماس کی لا ح/ط^۲ + ی ق/ص^۲ = ۱

اسے معلوم ہوا کہ مساوات لا^۲/ط^۲ + ی^۲/ص^۲ = لا ح/ط^۲ + ی ق/ص^۲ بعض اوس مقام النقاط کو تعبیر کرتا ہے، جو نقاط مماس میں گذرتا ہی (۱۰) مساوات بعید البضوی کی (ی - ق) ص^۲ لا = (لا - ح) ط^۲ ی ہے

(۱۲) فرض کرو کہ یَ و یً دو معین کو تعبیر کریں جو موافق ایک ہی محدد لاَ کے لیے جائیں تو

یَ = √(-ص لاَ + ص^۲ لا^۲ - ط لاَ^۲ + ف) و یً = -ص لاَ - √(ص^۲ لا^۲ - ط لاَ^۲ + ف)

مساواتیں عمود المماسون کی بموجب دفعہ ۲۸۴ کے یہ ہیں

(ی - یَ) (ط لاَ + ص یَ) = (یَ + ص لاَ) (لا - لاَ) اور

(ی - یً) (ط لاَ + ص یً) = (یً + ص لاَ) (لا - لاَ)

اور جمع کرنے سے (ط − صٓ) لاٗ (ی + ۲ صٓ لاٗ) + ص ف = ۰ (۱)

تفریق کرنے سے ص (ی + ص لاٗ) − (ط − صٓ) لاٗ = لا − لاٗ

اسواسطے لاٗ (۱ + ۲ صٓ − ط) = لا − ص ی . . . . (۲)

(۲) سے قیمت لاٗ کی نکالکر (۱) مین رکھو تو مساوات مطلوب حاصل ہو جائیگی مقام النقاط بلفظ البصری سے

(۳) مقام النقاط وہ تراش مخروطی ہے جو ۃ اور ر پر گذرتی ہے اور خطوط معینہ کے نقطہ تقاطع پر (۱۹) دو مقام النقاط جنمین سے ایک بیضوی دوسری قریب البیضوی (۲۰) ایک دائرہ

(۲۳) دفعہ ۲۹۳ دیکھو (۲۶) دفعہ ۲۹۴ مین جو مساوات قریب البیضوی کی لکھی ہوئی اوسے اور باب چہارم کی ۱۲ مثال مین جو مساوات دائرہ کی ہے اوسے کام مین لاؤ (۳۰) لو حسا ار = س

(۳۰) $\frac{ی^2}{لا^2} + \frac{ی^2}{ی^2} \cdot \frac{ی^2}{لا^2} = ط^2$ (۳۲) باب دہم کی ۳۰ مثال دیکھو دوسری مین وہ خط مستقیم ہے (۳۸) ایک دائرہ ہی جسکا مرکز ۃ ہے

(۴۴) $\frac{صٓ لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{صٓ} = ۱$ (۴۶) مساوات $ی^2 = ۴ط (لا − ۸ط)$ ہے

(۵۰) خط $\frac{لا}{ط} − \frac{ی}{ص} = ۰$ تنصیف وتر مماس کی کرتا ہے اسواسطے متوازی محور قریب البیضوی کا ہے اگر نقطہ (۰ و ط) کے سے ایک خط دی زاویہ مماس کے ساتھہ بناتا ہوا کھینچا جاے جو محور بناتی ہین تو مماسکہ اس خط مین س ہوگا جسکی مساوات

ی (لا + ۲ ص حم ر) + ص (لا − ط) = ۰ ہی اور علی ہذا القیاس ایک خط (۰ و ص) سے ایسا کھینچ سکتے ہین کہ اوسمین بہی مماسکہ ہو (۵۲) مساوات ایک عمود المماس کی

$ی = م لا − ط م − ط م^3$ ہین اور دوسرے عمود المماس کی مساوات $لا = مَ ی − ط مَ − ط مَ^3$ فرض کرو اور نیز $م = −\frac{۱}{مَ}$ کو جمع کرنے سے ی + لا = م (لا − ی) اول مساوات مین م کی قیمت مندرج کرو اور اختصار کرو تو $۲ط (لا + ی) = (لا − ی)^2$ حاصل ہوگا

(۵۳) ہم کو م

$ی − م لا = − \frac{م (ط^2 − ص^2)}{\sqrt{(ط^2 + م^2 ص^2)}}$ اور $م ی + لا = \frac{م (ط^2 − ص^2)}{\sqrt{(م^2 ط^2 + ص^2)}}$

مین سے ساقط کرنا چاہئے مجذور کرو اور جمع کرو اور مختصر کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

$$ى^2 + لا^2 = \frac{(ط^2+ص^2)(ط^2-ص^2)^2}{ط^2 ص^2 (م - \frac{1}{م})^2 + (ط^2+ص^2)^2} \quad \cdots \quad (1)$$

اور نیز $(ى - م\,لا)^2 (ط^2 + م^2 ص^2) = (م\,ى + لا)^2 (م^2 ط^2 + ص^2)$

مختصر کرنے سے ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ

$$(ط^2 ى^2 - ص^2 لا^2)(م - \frac{1}{م}) = -2\,لا\,ى\,(ط^2+ص^2) \quad \cdots \quad (2)$$

(۱) اور (۲) سے

$$(ط^2+ص^2)(لا^2+ى^2)(ط^2 ى^2 + ص^2 لا^2)^2 = (ط^2 - ص^2)^2 (ط^2 ى^2 - ص^2 لا^2)^2$$

(۵۴) دفعہ ۱۹۲ کی شکل دیکھو وہ بیضوی اور اقطار مزدوج کو تعبیر کرتی ہی باب نہم کی ۲۳ مثال مین جو مساوات لکھی ہے اوسکو مساوات اوس عمود المماس کی مقرر کرو جو نقطہ ع سی کھیچا جاے اور اسیکے متماثل مساوات اوس عمود المماس کی لو جو نقطہ د سی کھیچا جای اور ان عمود المماسون کے نقطہ تقاطع کو ق سے اور اوسکے محددین کو لا اور ی سی تعبیر کرو تو یہہ دریافت ہوگا کہ

$$ط\,لا = (ط^2 - ص^2)\,حا\,بر\,حم\,بر\,(حا\,بر - حم\,بر)$$

$$ص\,ى = (ص^2 - ط^2)\,حا\,بر\,حم\,بر\,(حا\,بر + حم\,بر)$$

اور اسیطرح اون عمود المماسون کے نقطہ تقاطع کے محددین جو نقاطع ا اور د سی کھیچے جائین تحقیق ہوسکتے ہین اس نقطہ کو ر سے تعبیر کرو اور پہر مثلث س ع ر کے رقبہ کو بیان کرو تو وہ ایک چوتہای رقبہ مطلوب کا ہوگا

(۵۵) مربع کے مرکز کو مبدء اور اضلاع مربع کے متوازی محور مقرر کرو اور مساوات دائرہ کی $لا^2 + ى^2 = 2ط^2$ لو اور تراش مخروطی کی مساوات $ى^2 - ط^2 = لر(لا^2 - ط^2)$ لو مساوات مماس دائرہ کی نقطہ $(لا_1 و ى_1)$ پر $لا لا_1 + ى ى_1 = 2ط^2$ اور مساوات مماس تراش مخروطی کی نقطہ $(لا و ى)$ پر $ى ى - لر لا لا = ط^2 (1 - لر)$ یہہ مساواتین ایک ہی خط کو تعبیر کرتی ہین پس لر اور $لا_1$ اور $ى_1$ کو ساقط کرین تو ایک مساوات حاصل ہوگی جسے مقام النقاط مطلوب حاصل ہوگا اور یہہ دریافت ہوگا کہ مساوات اسطرح لکھی جاتی ہے

$$[(لا^2 + ى^2 - 2ط^2)]^2 [ط^2 (لا^2 + ى^2) - 2 لا^2 ى^2] = 0$$

(۵۶) اول حصہ کا استخراج دفعہ ۲۸۸ سے ہوتا ہے اور دوسرے حصہ کا استخراج اسطرح ہوتا ہی کہ ایک عمود نقطہ ہ سے مماس ت ق پر نکالو اور فرضکرو کہ یہہ عمود ص ق کو جس نقطہ پر تقاطع کرتا ہے وہ ر ہی تو ص ر = ص ق + ق ر = ۲ ط اور ت ر = ت ہ اب ہمکو قیمت عمود کی جو نقطہ ت سے ص ر پر نکالا جائے دریافت کرنی اسکو ق سے تعبیر کرو تو ق ۲ ط = دو چند رقبہ مثلث ت ص ر کے

فرض کرو کہ ت ص = س ۱ اور ت ر یا ت ہ = س ۲ پس مثلث کے رقبہ کے واسطے وہ جملہ جسمین اضلاع لکھی گئی ہین کام مین لاؤ تو یہہ حاصل ہوگا کہ

۴ ق ط = $\sqrt{}$ (۲ س۱² س۲² + ۸ ط² س۱² + ۸ ط² س۲² − س۱⁴ − س۲⁴ − ۱۶ ط⁴)

اسسے نتیجہ مطلوب حاصل ہوگا یا اسطرح کہ فرضکرو ہ زاویہ درمیانی ہ ع اور ت ع کو تعبیر کرے تو یہہ حاصل ہوگا کہ ق = ت ع جب ہ = ت ع × ص / س د اسمین س د مزدوج س ع کا ہے دفعات ۱۸۱ اور ۱۹۳ دیکھو اور وہ دفعہ ۲۰۸ سے ثابت ہوسکتا ہی

$$\left(\frac{ت ع}{س د}\right)^2 = \frac{لا^2}{ط^2} + \frac{ی^2}{ص^2} - 1$$

## پندرہوان باب

(۶) ۱ لا ھہ + ۱ ی ب + ۱ ی لر = ۰ (۱۰) مساوات تراش مخروطی کی ل ب لر + م لر ھہ + ن ھہ ب = ۰ اور اکی کی (م + ن) ھہ + ل لر = ۰ اور اکس کی (م + ن) ھہ + ل ب = ۰ اور اکی کی (م + ن) ھہ + (ل + ن) ب

(۲۱) ل / لر + م / ب + ن / ھہ = ۰ (۲۴) فرض کرو کہ ص ماسکہ ہی خط ل ھہ + م ب + ن لر = ۰ پر واقع ہے اور ھہ اور ب اور لر قیمتین ھہ و ن و لر کی بلحاظ ماسکہ کے ہی تو بموجب دفعہ ۱۸ اکے ھہ ھہ = ب ب = لر لر = مربع نصف محور اصغر ان قیمتون کو مساوات معلوم مین رکہکر ہمکو یہہ حاصل ہوتا ہے کہ ل / ھہ + م / ب + ن / لر = ۰ یعنی ل ب لر + م لر ھہ + ن ھہ ب = ۰ اسسے ثابت ہوتا ہی کہ مقام انعکاس نقطہ کا تراش مخروطی ہے جو مثلث کے کونون کے نقاط پر گذرتی ہے

(۲۵) تراشہائے مخروطی کی مساواتین ان مساواتون سے تعبیر ہوتے ہین

(۱) ب لر - ھ‍ہ² = ۰ (۲) لر ھ‍ہ - ب² = ۰ (۳) ھ‍ہ ب - لر² = ۰

اب (۱) کو اسطرح لکھہ سکتے ہین کہ ب (لر + ب - ۲ ھ‍ہ) - (ھ‍ہ - ب)² = ۰

(۲) لر (ھ‍ہ + لر - ۲ ب) - (ب - لر)² = ۰

(۳) ھ‍ہ (ب + ھ‍ہ - ۲ لر) - (لر - ھ‍ہ)² = ۰

اسے ثابت ہوتا ہے کہ تراشہائے مخروطی کے مماسون کا نقطہ ان مساواتون سے معلوم ہوتا ہے کہ

لر + ب - ۲ ھ‍ہ = ۰ و ھ‍ہ + لر - ۲ ب = ۰ اور ب + ھ‍ہ - ۲ لر = ۰

یہہ تین خط جداگانہ خطوط ھ‍ہ = ۰ و ب = ۰ و لر = ۰ کو اون تین نقطون پر قطع کرتے ہین

جو خط ھ‍ہ + ب + لر = ۰ مین واقع ہوتے ہین پہر (۱) اسطرح لکہی جاتی ہے کہ

ب (لر + ۴ ھ‍ہ + ۴ ب) - (ھ‍ہ + ب)² = ۰ اور (۲) اسطرح لکہی جاتی ہے

ھ‍ہ (لر + ۴ ھ‍ہ + ۴ ب) - (ب + ۲ ھ‍ہ)² = ۰ اور اسے ثابت ہوتا ہی کہ

لر + ۴ ھ‍ہ + ۴ ب = ۰ مماس مشترک (۱) اور (۲) کا ہی اور یہہ مماس مشترک

لر = ۰ سے اوس نقطہ پر ہین جسپر ب + ھ‍ہ - ۲ لر = ۰ اوسے ملتا ہی اور علی ہذا القیاس

(۲۶) اول بعید البیضوی کی مساوات ب لر = ۱/۴ جب² (ل/م) اور علی ہذا القیاس اورون کی کیفیت ہے

(۲۷) دفعہ ۲۷۴ دیکہو (۲۸) اور (۲۹) مثلث کے اضلاع پر منطبق محور محرف فرض کرو

مثلاً (۲۹) مین ہم کو معلوم ہی کہ ط ھ‍ہ + ص ب + س لر = ط لر جب س

پس مساوات اسطرح لکہی جاتی ہی کہ س ن ھ‍ہ ب (ل ب + م ھ‍ہ) (ط ص جب س + ط ھ‍ہ + ص ب)

اور س ا کو محور لا کا اور س ب کو محور ی کا مقرر کرو تو یہہ حاصل ہوگا کہ

ھ‍ہ = لا جب س اور ب = ی جب س اور ھ‍ہ اور ب کی قیمتین رکہو تو مساوات

لا اور ی مین ایسی حاصل ہوگی کہ اوسکا امتحان معمولی طور پر ہوسکیگا دفعات ۲۷۲ اور ۲۷۸ دیکہو

(۳۰) لر/ل + ب/م + ھ‍ہ/ن = ۰

(۳۱) لو (م نَ - مَ ن) = مو (ن لَ - نَ ل) = مکا (ل مَ - لَ م)

(۳۲) فرض کرو کہ صف ۱ = ۰ مساوات دائرہ اندرونی اور صف ۲ = ۰ مساوات دائرہ بیرونی کی ہین یہہ ضرور نہین کہ مساواتین اپنی سادی صورت مین ہون دفعہ ۱۱۰ دیکھو اگر ق ایک مقدار مستقل ہو تو مناسب مقدار مستقل صف ۱ - ق صف ۲ = ۰ خط مطلوب کو تعبیر کریگی اسطرح ہمکو یہہ حاصل ہوگا کہ

ھہ^۲ جم^۲ ا/۲ + ب^۲ جم^۲ ب/۲ + لر^۲ جم^۲ س/۲ - ۲ ب لر جم ب/۲ جم س/۲

- ۲ لر ھہ جم س/۲ جم ا/۲ - ۲ ھہ ب جم ا/۲ جم ب/۲

- ق (ب لر حا ا + لر ھہ حا ب + ھہ ب حا س)

= (ط ھہ + ص ب + س لر) (ل ھہ + م ب + ن لر)

اسمین ل اور م اور ن دریافت کرنے ہین ارقام متماثلہ کے مقابلہ کرنے سے ہم ل اور م اور ن کو دریافت کرتے ہیں

(۳۳) یہہ ثابت ہوسکتا ہی کہ مساوات

ن ب + م لر / ط = ن لر + ن ھہ / ص

ایک قطر کو تعبیر کرتی ہی اسواسطے کہ یہہ مساوات اوس خط کو تعبیر کرتی ہی جو ا اور ب کے مماسون کے نقطہ تقاطع پر گذرتا ہے پس اسے معلوم ہوا کہ مرکز تراش مخروطی کا متعین ہوگیا

ل ب + م لر / ط = ل لر + ن ھہ / ص = م ھہ + ل ب / س

پس مساوات مطلوب دریافت ہوسکتی ہے وہ یہہ ہے کہ

ب / م (ط ل - ص م + س ن) = لر / ن (ط ل + ص م - س ن)

(۳۴) مساوات مطلوب کے واسطے فرض کرو کہ لر = مقدار مستقل کے یعنی لر = ق (ط ھہ + ص ب + س لر) پس مثال ۲۱ کی ماحصل کو کام مین لانے سے مساوات مطلوب (ل ص + م ط) (ط ھہ + ص ب) - ن ط ص لر = ۰ حاصل ہوسکتی ہی

(۳۵) مساوات تراش مخروطی کی اسطرح مقرر کرو کہ ھہ ب = ق لر^۲ اور مساوات خط ع ق کی یہہ ہوگی کہ ھہ - ب = ۰ اور مساوات وتر کی ھہ - ب = ن لر

[illegible]

نقاط تقاطع مین ملائی جائین اور اخر مساوات کی صورت بالقرینہ سے ہم یہہ نتیجہ نکالتے ہین کہ خط وہی زاویہ خط ھہ = ۰ سے بناتا ہے جو اور خط ب = ۰ سے بناتے ہین فقط

تمام شد ۸ - دسمبر ۱۸۷۱ع